昭和38年７月２日第３種郵便物認可
2013年６月１日発行　第51巻６号　毎月１回１日発行
ISSN 0386―2240

数理科学

6
2013

特集

発展する統計力学
導き出される新たな世界像



No.600

サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 600 June 2013

発展する統計力学
導き出される新たな世界像

表紙：戸川　隼人

お得な定期購読をおすすめします

毎号確実に御手元へ

地域によって書店店頭に陳列されない場合があります．**郵送料小社負担**にて確実に御手元へ届く定期予約購読をおすすめします．

予約購読は１年間(本誌のみ) 11,000 円，半年間(本誌のみ) 5,500 円．(税込み価格)

造本コストは更に上昇気味です．小社としてもあらゆる努力をもって廉価で提供してゆきたいと思っておりますが，定価改定の止むなき事態がかんがえられます．この場合予約購読期間中のものにつきましては料金据置きとなります．なお，臨時別冊のご注文については，本誌予約購読者の方には，商品到着後のお支払いにて承ります．

お申し込みは本誌とじ込みの振替用紙を御利用下さい．

数理科学特集一覧

63 年/7～2010 年/5 省略
2010 年/6 現代幾何と方程式
/7 物理学と行列
/8 力の統一にむけて
/9 南部陽一郎
/10 曲面の不思議
/11 連続から離散へ
/12 物理における《破れ》と調和
2011 年/1 数論の探求
/2 物理現象を読み解く数学的手法
/3 方程式と現代代数学
/4 物理学と多様体
/5 初学者を悩ます数理の概念
/6 物理イメージと数式表現
/7 〈隠れた〉物理法則
/8 計算が拓く数学と物理の世界
/9 オイラー
/10 時空と熱力学
/11 線形から非線形へ
/12 物理と仮説
2012 年/1 数学から物理へ，物理から数学へ
/2 古典のススメ[物理編]
/3 量子を操る
/4 量子力学の数学的技法
/5 解析学と物理学
/6 面白い発想[物理編]
/7 数学と物理における格子
/8 導来圏をめぐって
/9 ハイゼンベルク
/10 超弦理論の数理
/11 物理と数学における厳密解
/12〈振動する〉物理
2013 年/1 表現論の世界
/2 《量子化》の発想
/3 光と物理学
/4 解析学における様々な発想
/5 次元の作法

数理科学臨時別冊一覧

12 年/3 演習形式で学ぶリー群・リー環
12 年/4 弦理論の代数的基礎
12 年/5 アインシュタイン方程式
12 年/6 CP 対称性の破れ
12 年/7 弦の場の理論
12 年/9 超弦理論の応用
12 年/10 複素多様体論講義
12 年/11 幾何学の量子化
12 年/12 量子力学から超対称性へ
13 年/1 行列解析ノート
13 年/4 無限量子系の物理と数理

「数理科学」のバックナンバーは下記の書店・生協の自然科学書売場で特別販売しております

紀伊國屋書店本店(新宿)
紀伊國屋書店新宿南店
あおい書店中野本店
オリオン書房ノルテ店(立川)
くまざわ書店本店(八王子)
くまざわ書店桜ヶ丘店(多摩)
書泉グランデ(神田)
三省堂本店(神田)
リブロ池袋店
ジュンク堂池袋本店
芳林堂(高田馬場)
MARUZEN &ジュンク堂渋谷店
八重洲ブックセンター(東京駅前)
丸善丸の内本店(東京駅前)
丸善日本橋店
MARUZEN 多摩センター店
ジュンク堂吉祥寺店
ブックファースト青葉台店(横浜)
有隣堂イセザキ町本店(横浜)
有隣堂西口・東口(横浜)
有隣堂厚木店(厚木)
ジュンク堂盛岡店
丸善津田沼店
ジュンク堂新潟店
ジュンク堂甲府岡島店
MARUZEN &ジュンク堂新静岡店
戸田書店静岡本店
ジュンク堂大阪本店
紀伊國屋書店梅田店(大阪)
アバンティブックセンター(京都)
ジュンク堂京都店
ジュンク堂三宮店
ジュンク堂三宮駅前店
ジュンク堂大分店
喜久屋書店倉敷店
MARUZEN 広島店
紀伊國屋書店福岡本店
ジュンク堂福岡店
丸善博多店
ジュンク堂鹿児島店
紀伊國屋書店新潟店
ジュンク堂旭川店
金港堂(仙台)
金港堂パーク店(仙台)
ジュンク堂仙台本店
ジュンク堂秋田店
ジュンク堂郡山店
鹿島ブックセンター(いわき)
友朋堂(つくば)

――大学生協・売店――

東京大学 本郷・駒場
東京工業大学 大岡山・長津田
東京理科大学 新宿
早稲田大学 理工学部
慶応義塾大学 矢上台
福井大学
筑波大学 大学会館書籍部 第一学群書籍部
埼玉大学
名古屋工業大学・愛知教育大学
大阪大学・神戸大学 ランス
京都大学・九州工業大学
東北大学 理薬・工学
室蘭工業大学
徳島大学 常三島
愛媛大学 城北
山形大学 小白川
島根大学
学習院大学 成文堂
北海道大学 クラーク店
熊本大学
名古屋大学
広島大学 (北 1 店)
九州大学 (理系)

June 2013 MATHEMATICAL SCIENCES Number 600

発展する統計力学

宮下 精二

統計力学は，多数の自由度からなる系が示す集団運動を明らかにする分野であり，力学，量子力学など物理の基礎法則に関するものではなく，少し取り付きにくいものである．その背景には熱力学があり，狭義にはそこでの状態方程式（系の固有の性質を表す熱力学的な量の関係）を導くものである．そこでは，温度という特殊な概念が現れる．それは状態の集団としての分布を特徴付ける性質であり，エントロピーという特異な量とセットで定義される．しかし，統計力学の興味は，必ずしもそれに止まらず，多数の自由度をもつ系が織りなす集団協力現象一般に進んでいる．

統計力学の興味はあり方と特徴として普遍性の追求があると考えられる．個々の現象の中に普遍的な特徴を見出し，それをモデルとして表し，その機構によって多くの現象を普遍的に説明することを目指している．そのため，対象は多岐にわたり，元々の自然現象，特に物質の熱力学的な性質としての相転移などから，宇宙現象，経済現象，生態現象などに広がっている．一番典型的な例としてイジング模型がある．このモデルは，磁性体のみならず，二元合金，さらにはスピンクロスオーバー系など，2状態からなる系一般のモデルであり，さらに存在・非存在の2状態からなる系としての格子気体モデルとして気相・液相相転移現象のモデルとなることはよく知られている．平衡系の統計力学の方法論は基本的には，分配関数の計算であり，どのように足し算をうまくやるかの問題である．そのための数理物理学的方法の開発も統計力学の重要な一部である．分子場近似，級数展開，厳密解，厳密な関係式の方法，繰り込み群，数値計算など多くの方法が開発されてきた．特に，オンサーガーの2次元イジング模型の厳密解によってギブス流の統計力学で相転移現象が取り扱えることが示されて以来，厳密解は，可解模型の問題として数学的定式化が進み，数理物理学の重要な分野になっている．また，相転移の分類は共形場理論による分類などによって臨界状態の構造の分類が注目された．他にも，量子系の基底状態の分類は，次元が1大きな古典系の相転移と等価な問題であり，直接温度は関係ないが統計力学の問題として，いわゆる量子スピン系の問題として研究が進められてきている．これらの研究によって，様々なタイプの臨界現象が明らかになった．また，フラストレーションや量子効果，ランダムネス，長距離力など様々な効果でいろいろなタイプの相転移の研究も進んでいる．

また，熱力学の第二法則は，熱は温度が高いところから低いところに流れるということは規定しているが，どのように流れるかについては明らかにしていない．そのため，なぜ統計力学的状態が実現するのか，そのためにはどのような条件が系

に必要なのかなど基本的な疑問が出てくる．これらは通常の統計力学の枠外の基礎問題であり，ボルツマンのH定理などはこの問題への挑戦であった．その問題は，エルゴード問題として議論され，その関係でカオス問題やいわゆる力学系のダイナミクスの問題として展開してきた．また，より具体的な非平衡現象は，線形応答現象は久保理論によって定式化されたが，その意味やそれを超える一般の非平衡現象に関してはまだ多くの研究が試みられているところである．その中で，ゆらぎの定理なる状態変化に伴うエントロピー変化に関する厳密な関係が見出され，新しい展開になっている．また，ゆらぎの基礎課程としての拡散現象に関する解析も進んでおり，数理統計力学の重要な分野になっている．さらに，エントロピーはもともと情報量を表しており，この方面からの展開も進んでいる．

このように統計力学は多様な対象に対して展開されている．そこでは，現象の普遍的な側面を重視するため，個別系の個性を押さえた簡単なモデルで対象を代表させ，そのモデルを調べることが多い．そのためいわゆるトイモデルの研究と見なされることが大きい．扱っているモデルがどのような普遍性を持っているかは常に意識していなくてはならない．また，現象を説明する際に，現象から逆算して作ったような性質をモデルとして導入するのでは説明したことにならない．このような点に関して「どこがおもしろいのですか？」という久保亮五先生の定番のコメントを肝に銘じておかなければならないだろう．

統計力学の展開は多くの側面をもつが，本特集では，その中のいくつかのトピックを取り上げる．ゆらぎというものをどう捉えるかに関する先端の研究に関して非平衡統計力学について小林研介氏，量子統計力学の新概念を含めた最近の展開に関して桂法称氏，統計力学のホームグラウンドである物性物理学での統計力学に関して加藤雄介氏，宇宙の形成プロセスの統計力学的考察を吉田直紀氏，情報学と統計力学の構造の類似性に関して，梅野健氏，統計力学の基礎的プロセスであるブラウン運動とそこに現れる数理について香取眞理氏，そして，そもそも統計力学が成立している背景への考察を清水明氏・杉浦祥氏に解説をお願いし，さらにコラムとして，羽田野直道氏による経済物理，西森秀稔氏による現代の統計力学教育，鈴木増雄氏によるエントロピー生成に関する温故知新をお願いした．この他，紙面の関係で上で触れた重要な進展の中で触れられなかったものも多いがそれらに関しては，他の特集を参照されたい．

本特集が，統計力学という集団の示す普遍的性質への取り組みに対する理解，興味につながれば幸いである．

（みやした・せいじ，東京大学大学院理学系研究科）

メゾスコピック非平衡統計力学

小林　研介

1. はじめに

電気が流れる，という現象を考えてみよう．電気を流すためには，図 1 のように，抵抗などの回路部品（**素子**）を，導線を介して電池に接続する．すると素子の両端は一定の電位差に保たれる．電気が流れ，抵抗体にはジュール熱が発生する．これは典型的な非平衡現象である．身の周りの電子機器や電化製品を見れば分かるように，私たちは，電気伝導における非平衡性を巧みに利用してきた．特に，トランジスタのような増幅作用を持つ能動素子は，素子が非平衡状態にあることが本質的な役割を果たしている．ところが，多くの研究者の長年の取組みにもかかわらず，非平衡現象を統一的に取り扱うための物理的手法は，いまだに確立していないのである[1,2]．

それでも，近年，非平衡統計力学における理論の進展と，実験技術の進歩によって，**メゾスコピック非平衡統計力学**あるいは**微小系における熱力学**と呼べるような研究分野が発展しつつある[3]．メゾスコピック系とは，人工的に作製された微小な素子のことである．このような素子に，制御された非平衡状態を作り出すことによって，これまでに困難であった非平衡状態に対する定量的な研究を行うことが可能になってきたのだ．本稿では，そのような試みの一端をご紹介したい．

私たちが注目するのは，素子に流れる電流 I の時間に関する平均値 $\langle I \rangle$ に加えて，それがどれだけ揺らいでいるかという**電流のゆらぎ（電流雑音）** δI である．電流雑音を用いて非平衡電子系の研究をしよう，という動機自体は，90 年代からあったが[4,5]，近年，ようやく実験技術が追いついてきた．そのような観点から，メゾスコピック系の電流雑音から何が分かるのか，さらに，非平衡統計力学について何が言えるのかについてお話しすることが本稿の目的である．

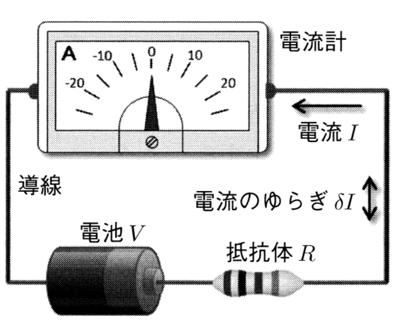


図 1　抵抗体，電流計，電池を導線で直結した電子回路．本稿では，電流 I だけではなく，そのゆらぎ（雑音）δI を考える．

2. 電気伝導における雑音

最初に，平衡状態にある電子回路の雑音を考える．図 1 で，電流計は，それ自身が雑音を出すことはない理想的な測定器であるとする．この回路から電池を抜き取り，抵抗体と電流計を導線で直結しよう．このとき，正味の電流は流れない．しかし，たとえ $\langle I \rangle = 0$ であったとしても，分散

$\langle(\delta I)^2\rangle \equiv \langle(I-\langle I\rangle)^2\rangle$ が 0 とは限らない．実際，実験では，電流計の針が 0 を境にして揺らぐことが観測される．これを**熱雑音**（あるいは平衡雑音）と呼ぶ．この原因は，電子が熱的に揺らいでいるためである．

電流雑音を定量的に扱うために，周波数 f の周りのバンド幅 Δf の電流のゆらぎを取り出し，以下のような電流雑音スペクトル密度と呼ばれる量を定義する．

$$S(f) \equiv \frac{\langle(\delta I(f))^2\rangle}{\Delta f}. \tag{1}$$

抵抗体の抵抗を R とすると，その熱雑音 $S_{\rm th}$ は，

$$S_{\rm th} = \frac{4k_BT}{R} = 4k_BTG \tag{2}$$

であることが知られている*1)．ここで $G \equiv 1/R$ は素子の伝導度，k_B はボルツマン定数，T は温度である．熱雑音は，平衡状態における電子の熱的ゆらぎを反映する量なので，温度に依存することは当然である．しかし，より重要なのは，伝導度 G が現れていることである．伝導度は，素子に電位差 V を与えたときに電流 $I=GV$ が流れる，という系の線形応答を特徴づける係数である．従って，式 (2) は，平衡状態における電子の**ゆらぎ**が，系に外場を与えたときの**応答**を表す，ということを示している．伝導度 G は，また，系に発生するジュール熱 GV^2（散逸）を特徴づける．すなわち，この式は，平衡状態におけるゆらぎ（揺動）と，線形非平衡な状態における散逸を結びつける．これを**揺動散逸関係**と呼ぶ．

揺動散逸関係の本質は，以下のように説明される[6]．私たちは，ある時刻に印加された外場に対して，系がどのように応答するかを知りたい．このことは，外場を瞬間的なパルスの重ね合わせとして記述し，各パルスに対する系の応答を追跡することと同じである．パルス印加後の系のダイナミクスは，系に内在する性質，すなわち平衡状態における自発的な熱的ゆらぎだけで決まる．よって，外場に対して系が線形に応答するという範囲

*1）本稿で扱う熱雑音・ショット雑音は，（周波数が小さい極限において）ともに周波数に依存しない雑音である．

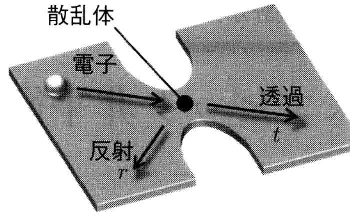


図 2　素子の中に設けられた電子にとっての散乱体の概念図．電子は，散乱体を確率 t で通過する．

において，応答と平衡状態におけるゆらぎは等価である．

揺動散逸関係は，アインシュタインのブラウン運動の理論において初めて現れ，ペランによる分子の実在を証明する実験に使われた[7]．彼らの研究は，ゆらぎが極めて本質的な情報をもたらすことを示した最初の例である．同時に，非平衡統計力学の夜明けを告げるものであった．その後，揺動散逸関係を軸として，1950 年代に久保亮五らを中心として線形応答理論が成立した．この理論は，系が線形応答する範囲内での非平衡を記述するための確立した枠組みを与える．

次に，回路に電池を入れて，素子両端に電位差 V を導入し電流 I が生じている，という非平衡な状況を考える．簡単のため，図 2 に概念的に示したような，素子の中に設けられた「通過しにくい場所」（散乱体あるいはポテンシャルバリア）を電子が通過する，という状況を考える．このような状況は，実際に，半導体 pn 接合や，金属–絶縁体–金属といったトンネル接合と呼ばれる素子で実現している．このとき，電流には，

$$S_{\rm shot} = 2e\langle I\rangle \tag{3}$$

というスペクトル密度を持つ**ショット雑音**と呼ばれる電流雑音が発生する．

このことを説明しよう．簡単のために，系は絶対零度にあるとする．電子を一個ずつ散乱体にむけて入射するという実験を N 回繰り返して行う．そのときの透過確率と反射確率を t と r（$t+r=1$）とし，透過電子と反射電子がそれぞれ「透過した状態」と「反射した状態」を占有率を n_t および

n_r で占めているとする．一個ずつ電子を打ち込むので，「$n_t = 1$ かつ $n_r = 0$」あるいは「$n_t = 0$ かつ $n_r = 1$」という2つの事象しか起こらない．よって，実験を繰り返した場合の平均値に関して，$\langle n_t \rangle = \langle n_t^2 \rangle = t$, $\langle n_r \rangle = \langle n_r^2 \rangle = r$ が成り立つ．よって，透過電子と反射電子の占有数のゆらぎ $\delta n_{t,r} \equiv n_{t,r} - \langle n_{t,r} \rangle$ は，$\langle (\delta n_t)^2 \rangle = \langle (\delta n_r)^2 \rangle = t(1-t)$ を満たす．通常，pn 接合やトンネル接合では，透過確率は極めて小さく，$t \ll 1$ である．よって，透過する電子の数の平均値と分散がともに Nt となる．これはポアソン分布に他ならない．電子一個が電荷 e を運ぶことに注意すれば，式 (3) が得られる*2)．このようにショット雑音は，電流を運ぶ実体である電子が粒（= shot）であることから生じる．

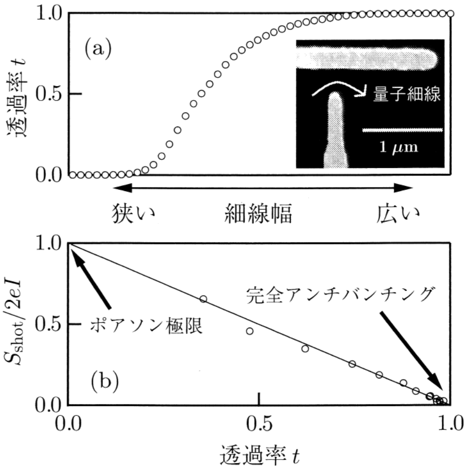


図 3 (a) 量子細線における細線幅と透過率の関係（実験値）．挿入図は細線の電子顕微鏡写真．(b) 細線における透過率とショット雑音．雑音は $2eI$ で規格化されている．実線は理論値，○ は実験値．

3. メゾスコピック系における電流雑音

上で述べた2種類の雑音については，20 世紀前半には既に知られていた．平衡状態における熱雑音は温度 T と伝導度 G で表されるのに対し，非平衡におけるショット雑音は電気素量 e を含んでいる．すなわち，両者は完全に別物であり，平衡状態と非平衡状態が質的に異なることを明瞭に表す．このことは，非平衡統計力学の難しさの一端を表しているとも言える．一方で，この事実は，電気伝導を制御しながら，雑音を詳細に調べることによって，非平衡状態を定量的に研究できるのではないか，という期待を抱かせてくれる．

このようなアイデアを可能にしてくれるのがメゾスコピック系である[8]．1980 年代，工業的に半導体素子の微細化が進んできたことによって，この分野が生まれた．メゾスコピック系（mesoscopic 系）とは，バルク物質のように巨視的なサイズ（macroscopic）の物質でもなければ，逆に原子レベルのように小さなスケール（microscopic）でもなく，その中間（meso-）の大きさの系を扱う，という意味が込められている．このような系では，量子効果を観測したり制御したりすることが可能なので，メゾスコピック系を**人工量子系**と呼ぶこともできる．メゾスコピック系の多くは，半導体や金属薄膜を微細加工して作られる数 nm〜数 μm 程度の小さい電子回路である．多くの研究の蓄積のおかげで，現在，私たちは，メゾスコピック系において電子の電荷やスピンなどに関する多彩な量子効果を自在に制御できるようになっている．例えば量子コンピュータの基本素子である量子ビットはその代表例である．

メゾスコピック系の具体例をもう少し詳しく見てみよう．図 3 (a) の挿入図に量子細線と呼ばれる素子の電子顕微鏡写真を示した．これは半導体上に作製されている．この素子においては，図 2 に示した概念図における「くびれ」にあたる細線部の幅を，電気的に連続的に変化させることができる．電子は特徴的な波長（フェルミ波長）を持っているので，細線幅を波長程度で制御することによって，散乱体の透過確率 t を 0 から 1 まで連続的に制御できる．例えば，細線の幅が波長の半分と一致するとき，電子は 100%透過する．これは単一の「伝導チャネル」によって電子が運ばれている状況である．しかし，細線幅がそれよりも

*2) 因子 2 はスペクトル密度の定義に由来する歴史的なものであり本質的な意味はない．

狭くなるにつれ，透過率も減少していく．その結果，細線の透過率（電気伝導度から得られる）は，図 3 (a) のように変化する[9]．

それでは，量子細線における電流雑音はどうなるであろうか．先ほどの議論では，$t \ll 1$ だったが，今回，t は 0 から 1 までを変化し得る．よって，

$$S_{\mathrm{shot}} = 2e\langle I\rangle(1-t) \tag{4}$$

となる．このような関係は実験でも確認されている（図 3 (b)）[9]．先ほどの議論と同様，$t \to 0$ で雑音はポアソン的（式 (3)）になる．一方，透過確率 $t=1$ のとき，全く雑音が発生しない．この現象の根本的な原因は，電子が同時に 2 個以上，同じ状態を占めることができない，というパウリの排他律による[10]．先ほどのショット雑音の議論では，「粒子を一個ずつ散乱体に向けて入射する実験」を繰り返す，という設定で考えたが，この入射過程そのものに由来するゆらぎは無視していた．この取り扱いは，透過確率が小さければ正当化される．しかし，今，単一の伝導チャネルのみが存在し，パウリの排他律によって，チャネルの占有率が 100%である状況では，入射過程自体に全くゆらぎが生じない．その結果として，$t=1$ のとき，電子はお互いに避け合いながら，一個ずつ規則正しく細線を通過し，結果として全くショット雑音が生じない．この現象は，「群れ（bunch）を形成しない／群れたがらない」という意味でアンチバンチングと呼ばれる，フェルミ粒子流に特徴的なものである．

4. 平衡と非平衡をつなぐ―ゆらぎの定理

ここまで述べてきたショット雑音の話は，系を非平衡の極限に置いた場合の話である．一方で，平衡状態においては，メゾスコピック系においても揺動散逸関係（式 (2)）が成立する．それでは，平衡状態に非平衡性を導入していくと，どのように非平衡になっていくのか？ メゾスコピック系では，印加電圧によって平衡から非平衡までを連続的に制御できるので，このような根源的な問いに

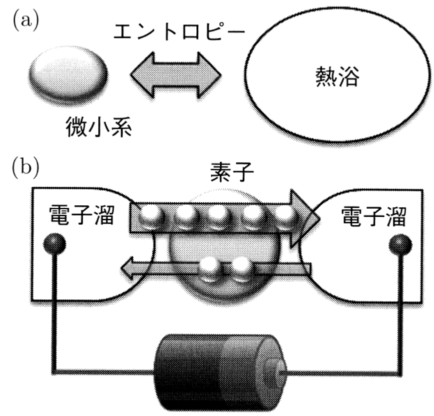


図 4　(a) ゆらぎの定理 (b) 電気伝導におけるゆらぎの定理.

定量的に答えることが可能である．実際に，近年そのような研究が行われるようになってきた．

このような研究の大きなきっかけを与えたのが，1993 年にエバンス–コーエン–モリスによって提唱された**ゆらぎの定理**である[1,2,11]．図 4 (a) に示したような，熱浴と結合した微小系を考えよう．熱力学の第二法則により「微小系 ＋ 熱浴」という全体で考えれば，エントロピーは増大していく．しかし，微小系と熱浴との間には，粒子交換や熱流などを通じて，エントロピーのやりとりがある．そこで，微小系における時間 t あたりのエントロピー生成率 σ_t を考えよう．ミクロな時間反転対称性に基づいた議論によって，$\sigma_t = A$ であるような確率 $P(\sigma_t = A)$ と，$\sigma_t = -A$ であるような確率 $P(\sigma_t = -A)$ との間に，以下のような厳密な関係式が示された．

$$\frac{P(\sigma_t = A)}{P(\sigma_t = -A)} = \exp(At). \tag{5}$$

これが，ゆらぎの定理である．この式は熱力学第二法則を定量的に記述する．例えば，長時間（大きな t）においては，右辺が大きいために，エントロピーが増大する確率（左辺の分子）が非常に大きくなることが分かる．また，ここから揺動散逸関係を再現することもできる．従って，ゆらぎの定理は，平衡状態を超えて非平衡系を定量的に研究する方法論を構築する際の指針を与えるものとして，多くの注目を集めている．

2008年，齊藤と内海によって，ゆらぎの定理が電気伝導に適用可能な形に拡張された[12]．先ほどの議論では，電気伝導を「電子が散乱体を通過する過程」であると考えたが，ここでは，図 4(b) のように，電気伝導を「素子を介して 2 つの電子溜（= 導線）の間で電子が交換される過程」であるとみなそう．2 つの電子溜の間に電位差 V があったとすると，化学ポテンシャルの差は eV である．電子は 2 つの電子溜の間を行ったり来たりするが，その結果，単位時間あたり，一方の電子溜から他方の電子溜へ正味 Q 個の電子が移動する確率 $P(Q)$ を考えよう．すると，時間反転対称性，粒子数保存則とエネルギー保存則を用いることによって，上のゆらぎの定理に似た次の関係式が成り立つことを示すことができる．

$$\frac{P(Q)}{P(-Q)} = \exp\left(\frac{eV}{k_B T} Q\right). \tag{6}$$

これが電気伝導におけるゆらぎの定理である．この式は電子の移動，すなわち電気伝導において，常に成り立つことが要請される．例えば，一方の電子溜から素子を介して他方へ Q 個の電子を送り込んだ場合，式 (6) を満たすような確率 $P(-Q)$ で，Q 個の電子を受け取らなければならない．これは，非常に強い束縛条件であり，電気伝導に様々な影響を及ぼす．今，$V = 0$ のとき（平衡状態）を考える．任意の Q について $P(Q) = P(-Q)$ であるから，Q の期待値 $\langle Q \rangle = \sum_Q QP(Q)$ が 0 であることを示せる．しかし，Q^2 の期待値は 0 ではなく，簡単な議論から熱雑音の表式 (2) が得られる[12]．つまり，確かに，式 (6) は揺動散逸関係を内包している．

5. ゆらぎの定理を検証する

この数年間で，メゾスコピック系を用いたゆらぎの定理の検証実験がいくつか行われてきた[13]．代表的なものが**人工原子**と呼ばれるメゾスコピック素子を用いた実験である．先ほど紹介した量子細線を近接して直列に 2 つ並べると，その間に電子を閉じ込めた小さな領域（直径 100 nm 程度）を

作ることができる．いま考えている系では，電子の波長が数十 nm 程度なので，大きさがその程度の場所に電子を閉じ込めると，エネルギー準位が離散化する．これは，量子力学や量子化学でシュレーディンガー方程式を習うと必ず出てくる箱型ポテンシャルモデルと同じ状況である．このような人工原子では，「現在，そこに何粒の電子がいるのか」という情報を時々刻々と得ることができる．この技術は，人工原子を通り抜ける電子の個数について，その平均値や分散だけでなく，より高次のモーメントの測定をも可能にする．原理的には，このような量（完全計数統計と呼ばれる）を観測することによって，非平衡状態も含め，電子の伝導過程の「すべて」の情報が得られる[14]．

最近，この手法をより工夫された形で適用することによって，導線の間に挟まれた人工原子上で電子が行き来する様子を，一個ずつ観測することが可能となった．例えば，人工原子の両端に電位差があったとしても，有限の確率で，電子は電位の向きに逆行することが観測される．実験的に，逆行した個数を数え，順方向に流れた電子の個数と比較することによって，式 (6) が成立することが報告されている[15]．これは，非平衡統計力学の知見とメゾスコピック系の実験が結びついた見事な研究である．

ところで，電気伝導の実験において電子の量子性が観測可能になるのは，時間分解能が h/eV および h/k_BT よりも良いときである（h はプランク定数）．しかしながら，上に述べた人工原子を用いた実験では，時間分解能を向上させることは現時点では技術的に難しい．それでは，量子性が重要であるような素子において，式 (6) を検証するにはどうしたら良いのであろうか．最近，私たちは，そのような実験を行った[13,16]．電子を一個ずつ数えるのは技術的に難しくとも，その平均値（電流）と分散（雑音）を高精度に測定できれば，完全な検証ではなくとも，その第一歩にはなるはずである．具体的には，式 (6) における重要なパラメータ eV/k_BT で展開して電流と雑音を考えることにしよう．電流は $I = GV + 1/2G'V^2 + \cdots$ となり，雑音は $S = S_{\rm th} + S'V + \cdots$ と表せる．$S_{\rm th} = 4k_BTG$ であって，これは先ほども述べた．実験でも確認できる．線形応答理論の守備範囲は原理的にはここまでである．しかし，式 (6) を用いれば，非線形かつ非平衡な領域における式 $S' = 2k_BTG'$ が理論的に予想される．私たちは，電子波干渉計と呼ばれるメゾスコピック素子を用いて，このような関係を実験的に示した．電子波干渉計では，電子が波として伝導していることを干渉パターンから見ることができるので，伝導の量子性を実験的に保証できる．

6. まとめ

従来，熱力学では微視的な系の詳細には立ち入らず，巨視的な変数を用いて（だからこそ高精度に）現象論的に物事を記述してきた．一方，統計力学は，ハミルトニアンを出発点として微視的に構築される．しかしながら，本稿で紹介した研究は，微視的に出発するものでありながら，ある程度は，マクロな非線形非平衡性について議論することを可能にしている．メゾスコピックなサイズだからこそ可能になった研究であるといえる．

ゆらぎの定理は，ここで紹介した実験以外にも，巨視的な抵抗体，溶液中のビーズ粒子，RNA の折りたたみなどで実験的に検証されてきた[1,3]．しかしながら，メゾスコピック系を用いた研究は，伝導度と非平衡性を制御しながら，統計精度の高い実験が可能であることが大きな利点である．また，古典系から量子系へと自然と拡張していけることもメリットである．例えば，量子性が重要になる伝導領域で完全計数統計実験を行い[14]，量子伝導におけるゆらぎの定理を完全に検証することは，今後の重要課題である．

近年では，古典系で非平衡統計力学実験が盛んに行われている．例えば，マックスウェルの悪魔の実証実験なども報告された[17]．量子系において，そのようなことが可能であろうか？ 技術的には，量子伝導をリアルタイムで観測しながら，伝導を制御することが可能になるはずである．そうなれ

ば，マックスウェルの悪魔の量子版を実現できる．近い将来，このようなメゾスコピック非平衡統計力学の実験を行うことによって，ミクロとマクロをつなぎ，統計力学と熱力学，そして量子力学を定量的に橋渡しするような研究が行われるようになるであろう．

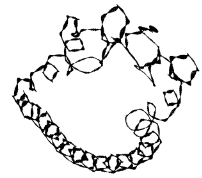
謝辞　齊藤圭司（慶應義塾大学理工学部）・内海裕洋（三重大学工学部）の両氏から頂いた有益な議論に感謝いたします．また，本稿の内容は，最先端・次世代研究開発支援プログラムの助成を受けて行われた研究に基づいています．

参考文献

1) 早川尚男：『非平衡統計力学』（サイエンス社，2007）．
2) 日本物理学会誌，**63** (2008) No.10 — 特集「線形応答理論から 50 年—非線形・非平衡の物理学」．
3) C. Bustamante, J. Liphardt and F. Ritort: *Physics Today*, **58**, (2005) 43.
4) 清水明：固体物理 **28** (1993) 771.
5) 上田正仁：日本物理学会誌 **49** (1994) 751.
6) 中嶋貞雄：日本物理学会誌 **50** (1995) 699.
7) 米沢富美子：『ブラウン運動』（共立出版，1986）．
8) 勝本信吾：『メゾスコピック系』（朝倉書店，2003）．
9) S. Nakamura *et al.*: *Phys. Rev. B* **79** (2009) 201308(R).
10) C. Beenakker, and C. Schönenberger（八木隆多訳）：パリティ **19**, No.2 (2004) 14.
11) D.J. Evans, E.G.D. Cohen, and G.P. Morriss: *Phys. Rev. Lett.* **71** (1993) 2401.
12) K. Saito and Y. Utsumi: *Phys. Rev. B* **78** (2008) 115429.
13) 小林研介：固体物理 **46**, (2011) 519.
14) 内海裕洋：固体物理 **41** (2006) 909.
15) Y. Utsumi *et al.*: *Phys. Rev. B* **81** (2010) 125331; B. Küng *et al.*: *Phys. Rev. X* **2** (2012) 011001.
16) S. Nakamura *et al.*: *Phys. Rev. Lett.* **104** (2010) 080602; *Phys. Rev. B* **83** (2011) 155431.
17) S. Toyabe *et al.*: *Nature Physics* **6** (2010) 988.

（こばやし・けんすけ，大阪大学大学院理学研究科）

量子統計力学と恒等式



桂　法称

はじめに

量子力学と統計力学，この2つの分野に学部生時代に強く惹かれたのは，これらが高校時代に学ぶ物理と最も遠くかけ離れて見えたためだろう．量子力学の講義では，ミクロなばねの問題を生成・消滅演算子を使ってデジタルなゲームのように解いていき，実際にデジタルな（量子化された）エネルギーが出てくることを学んだ．また統計力学の講義では，ゴムは温めると縮むことを，剛体棒の折れ曲がり方のパターンを数えることにより説明できると習った．このように，一見無関係に見える代数や組合せのような数学的概念が，物理現象を説明するために不可欠であることを不思議に思った記憶がある．

本稿では，量子統計力学の話題と組合せ論や複素関数の留数積分などの意外な数学が，思わぬ接点を持ち結びつく様子を，いくつかの例を通じて紹介したい．そこでは，純粋数学とその応用先としての物理の問題，という単純な図式ではなく，もっとダイナミックな関係が見出せると思う．両者の言語を行きつ戻りつしている間に非自明な結果が得られる快感を味わって頂ければ幸いだ．

1. 分割パズル

量子統計力学の観点から，一見無関係に見える整数の分割に関する問題を解いてみよう．整数の分割とは，自然数 $n\ (>0)$ をいくつかの自然数の和で表すやり方のことである．例えば，$n=5$ のとき次の7通りの表し方がある．

$$\begin{aligned} 5 &= 4+1 = 3+2 = 3+1+1 = 2+2+1 \\ &= 2+1+1+1 = 1+1+1+1+1. \end{aligned} \tag{1}$$

ここでは足し算の順序は問わないこととする．整数の分割は，一見単純な「足し算」の問題に見えるが，オイラーの研究に端を発する由緒正しい数論の問題である[1]．分割の問題の難しさは，「分割数」を考えてみるとよく分かる．自然数 n の分割数 $p(n)$ とは，分割のやり方が何通りあるかを表す関数で，例えば，上の $n=5$ のとき，$p(5)=7$ である．n が小さい場合には，この例のように具体的に数えることができるが，n が大きくなると $p(10)=42$, $p(50)=204226, \cdots$ となり途端に難しくなってくる[*1]．

分割の自然な拡張として，今度は制限付きの分割というものを考えてみよう[2]．(1) のうちで，相異なる自然数の和で表せる場合は，$5=4+1=3+2$ の3通りである．一方で，奇数のみの和で表せる場合は $5=3+1+1=1+1+1+1+1$ の3通りである．前者を「ストリクトな分割」，後者を「奇数による分割」と呼ぶ．不思議なことに両者はともに3通りである．$n=6$ の場合を試しても，両者のやり方の総数は一致している[*2]．これは偶然ではなく，実はオイラーによりこの2通りの制限付き分割数は必ず等しいということが示されて

*1) *Mathematica* には `PartitionsP[n]` という関数で，$p(n)$ は組み込まれている．

*2) ストリクトな分割は $6=5+1=4+2=3+2+1$ で4通り，奇数による分割は $5+1=3+3=3+1+1+1=1+1+1+1+1+1$ で4通りである．

いる．つまり，自然数 n のストリクトな分割数を $p_{\rm str}(n)$，奇数による分割数を $p_{\rm odd}(n)$ とすれば，

$$p_{\rm str}(n) = p_{\rm odd}(n) \qquad (2)$$

が必ず成り立つことを意味する．

2. 母関数と大分配関数

上のパズルの正統的な解き方は，ストリクトな分割と奇数による分割との間の一対一対応を見つけることだが，筆者にはすぐに見えてこない．そこで，別のアプローチとして母関数というものを考えてみることにしよう．形式的な変数 q を導入し，$p_{\rm str}(n)$ の母関数を $Z_{\rm F}(q) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{\rm str}(n)q^n$，$p_{\rm odd}(n)$ の母関数を $Z_{\rm B}(q) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{\rm odd}(n)q^n$ とべき級数の形で定義する．これらは制限付き分割数を関数に埋め込んだものと考えられる．したがって2つの母関数の間の恒等式 $Z_{\rm F}(q) = Z_{\rm B}(q)$ が示せれば，関係 (2) が示せることになる．

まだ量子統計力学との関係は見えてこないかもしれない．実は以下で見るように，$Z_{\rm F}(q)$ はあるフェルミオン系の，$Z_{\rm B}(q)$ はあるボゾン系の大分配関数とみなせるのだ．大分配関数とは，**グランドカノニカル分布**における確率の規格化因子で，注目する（多粒子）系の i 番目の固有状態のエネルギーを E_i，その粒子数を N_i とすると

$$\Xi(\beta,\mu) = \sum_{i=1}^{\infty} \exp(-\beta E_i + \beta\mu N_i) \qquad (3)$$

で与えられる[3]．ここで，β は系と平衡にある環境系の逆温度，μ は化学ポテンシャルである．この確率分布では，(E_i, N_i) に対応する多粒子状態の出現確率は，$e^{-\beta(E_i-\mu N_i)}/\Xi(\beta,\mu)$ で与えられる．

まず，$Z_{\rm F}(q)$ に対応する系として，一粒子の固有エネルギーが $\epsilon_j = j\hbar\omega$ $(j = 1, 2, 3, \cdots)$ で与えられるフェルミオン系を考えよう．これは，1次元調和ポテンシャル中の粒子集団と考えることもできる（図 1(a)）．フェルミオンどうしが相互作用しない場合は，多体の固有状態は，一粒子波動関数を反対称化することにより得られる．その帰結として，各準位には高々1個のフェルミオンしか入れない．

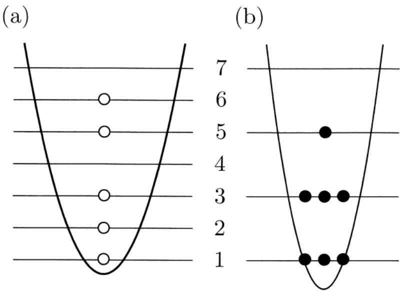


図 1 (a) フェルミオン系と (b) ボゾン系に対応する調和ポテンシャルと一粒子準位．エネルギー $E = 17\hbar\omega$ で，占有数が $(1,1,1,0,1,1,0,\cdots)$ のフェルミオン系の多粒子状態は，同じエネルギーで占有数が $(3,3,1,0,\cdots)$ のボゾン系の状態に対応する．

このルール（**パウリの排他律**）が，前節での分割の話と関係するということに気付かれただろうか？ $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \cdots$ が $n_1, n_2, n_3, \cdots$ 個のフェルミオンにより占有されている場合，対応する状態のエネルギーは，$E = (n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \cdots)\hbar\omega$ となる．しかしフェルミオン系では n_j は0か1かに限られるので，あるエネルギー $E = n\hbar\omega$ を与えたとき，対応する（多粒子）状態は n の分割のうちストリクトな分割で書けるものに限られる．また，その総数は $p_{\rm str}(n)$ である．したがって，(3) から

$$\Xi(\beta, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{\rm str}(n) e^{-n\beta\hbar\omega} \qquad (4)$$

であることが分かる．$q = e^{-\beta\hbar\omega}$ としてやれば，これは $Z_{\rm F}(q)$ そのものである．

一方で統計力学の講義で習うように，$\Xi(\beta,\mu)$ は次のようにして計算することができる*3)．

$$\Xi(\beta,\mu) = \sum_{n_1=0}^{1}\sum_{n_2=0}^{1}\cdots \exp\left[-\beta\sum_{j=1}^{\infty}(\epsilon_j - \mu)n_j\right]$$
$$= \prod_{j=1}^{\infty}(1 + e^{-\beta(\epsilon_j-\mu)}). \qquad (5)$$

(4) と (5) を見比べてやれば，ストリクトな分割の母関数が次のように求まる．

$$Z_{\rm F}(q) = \prod_{j=1}^{\infty}(1 + q^j). \qquad (6)$$

---

*3) グランドカノニカル分布では，系の全粒子数が固定されていないので，このような計算が極めて簡単になる．

さて，次は $Z_{\mathrm{B}}(q)$ に対応する系として，一粒子の固有エネルギーが $\epsilon_j = (2j-1)\hbar\omega$ $(j = 1,2,3,\cdots)$ で与えられるボゾン系を考えよう．こちらも調和ポテンシャル中のボゾン系と考えられるが，ϵ_j は $\hbar\omega$ の奇数倍の値しかとれない（図 1 (b)）．この系で $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \cdots$ が $n_1, n_2, n_3, \cdots$ 個のボゾンにより占有されている場合，対応する状態のエネルギーは，$E = (n_1+3n_2+5n_3+\cdots)\hbar\omega$ となる．ボゾン系では各準位にいくらでも粒子が入ることができるので，与えられたエネルギー $E = n\hbar\omega$ に対応する（多粒子）状態は，n の奇数による分割で表せることが分かるだろう．したがって (3) から

$$\Xi(\beta, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{\mathrm{odd}}(n) e^{-n\beta\hbar\omega} \tag{7}$$

となり，これが $Z_{\mathrm{B}}(q)$ に一致する．また (5) と同様に，このボゾン系の大分配関数を計算すると

$$\Xi(\beta, \mu) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1 - e^{-\beta(\epsilon_j - \mu)}} \tag{8}$$

となるので，(7) と (8) を見比べて，以下を得る．

$$Z_{\mathrm{B}}(q) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^{2j-1}}. \tag{9}$$

分割の母関数という，純粋に組合せ論的な問題を眺めているうちに，思いがけず調和ポテンシャル中の同種粒子の問題が浮かび上がってきた．しかも (8) の $\Xi(\beta, \mu)$ には，$e^{\beta\mu}$ のべき乗の係数に，「n の N 個の奇数による分割の総数」という，より細かい情報さえも埋め込まれているのである．

3. パズルの解答

残る関門は母関数どうしの一致を示すことである．$|q| < 1$ と思い，両者をテイラー展開してやれば q の低次の項について一致することは簡単に分かる*4)．これが一般に成立することも

$$Z_{\mathrm{F}}(q) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1 - q^{2j}}{1 - q^j} = \frac{\prod_{j=1}^{\infty}(1 - q^{2j})}{\prod_{j=1}^{\infty}(1 - q^j)}$$

$$= \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^{2j-1}} = Z_{\mathrm{B}}(q) \tag{10}$$

*4) 例えば q の 10 乗までなら，$Z_{\mathrm{F}}(q) = Z_{\mathrm{B}}(q) = 1+q+q^2+2q^3+2q^4+3q^5+4q^6+5q^7+6q^8+8q^9+10q^{10}+\cdots$．

と無限積であることから，約分だけで示せる．

このようにして，(2) は示せた．さらに踏み込んで，ストリクトな分割と奇数による分割の間の一対一対応を示すには，フェルミオン系とボゾン系のフォック空間の対応を見てやればよい．フェルミオン系で $\epsilon_j = j\hbar\omega$ の準位に粒子を生成する演算子を $c_j^\dagger$，ボゾン系で $\epsilon_k = (2k-1)\hbar\omega$ の準位に一つ粒子を生成する演算子を $b_{2k-1}^\dagger$ とすると，j が奇数のときは素直に $c_j^\dagger \to b_j^\dagger$ と対応させてやればよい．問題となるのは，j が偶数のときだが，この場合は必ず自然数 k, ℓ を用いて $j = (2k-1)2^\ell$ と書けるので，$c_j^\dagger \to (b_{2k-1}^\dagger)^{2^\ell}$ と対応させる．逆にボゾン系からフェルミオン系への対応は，各準位の占有数を二進数表示してやれば一意に定まる．図 1 にこの対応の一例を示した．本質的に同じ対応関係は，組合せ論では「グレイシャー対応」として知られている[2]．

なお本稿では触れられないが，朝永–ラッティンジャー液体論として知られる 1 次元フェルミオン系のボゾンを用いた記述[4,5]では，上とは異なるボゾン・フェルミオン対応が用いられる．しかし，そこでもヤコビの三重積公式として知られる

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n q^{\frac{n(n+1)}{2}} = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)(1+zq^n)(1+z^{-1}q^{n-1})$$

という不思議な恒等式が現れる[6]．また，より複雑な制限の付いた分割に関する恒等式は，共形場理論や可解格子模型などの理論物理学の様々な文脈に手を変え品を変え現れる．

4. 留数積分と恒等式

前節までの話は比較的良く知られている話だが，少し話題を変えて最近の筆者の研究[7]に顔を出した不思議な恒等式を紹介しよう．

任意の複素数 $q, z_1, z_2, \cdots, z_N$ について，

$$\sum_{i=1}^{N} z_i \prod_{\substack{1 \le j \le N \\ j \ne i}} \frac{z_i - q z_j}{z_i - z_j} = \sum_{i=1}^{N} z_i \tag{11}$$

が成立する．ただし $z_1, z_2, \cdots, z_N$ は相異なる．

左辺の複雑な積の和が右辺では単純な z_i に関する

和にすり変わる，何とも不思議な式である．$N=2$ の場合に確認することは，

$$z_1\frac{z_1-qz_2}{z_1-z_2}+z_2\frac{z_2-qz_1}{z_2-z_1}=\frac{z_1^2-z_2^2}{z_1-z_2}=z_1+z_2$$

と簡単である．計算力に自信のある人なら，$N=3$ の場合も確認できるかもしれないが，$N\geq 4$ となると絶望的だろう．筆者自身は，ある量子多体系の問題を解く過程で偶然この恒等式を発見し，$N\geq 4$ の場合も数式処理ソフトにより確認して確信に至ったのだが，ここでは実際の時系列とは逆にまず数学的な証明を与えよう．

$q=1$ のとき，(11) は自明に成立しているので，$q\neq 1$ として，次のような複素関数 $f(z)$ を考える．

$$f(z)=\frac{1}{1-q}\prod_{1\leq j\leq N}\frac{z-qz_j}{z-z_j}. \qquad (12)$$

$z_1,\cdots,z_N$ は相異なるので，$f(z)$ は複素平面上で $z=z_1,\cdots,z_N$ に一位の極を持つことが分かる．図 2 に示した積分路 C 上の $f(z)$ の複素積分は，有名なコーシーの積分公式を用いてやれば，$z=z_1,\cdots,z_N$ での留数の和から (11) の左辺となることが分かるだろう．一方で，C の外側には特異点は存在しないので，積分路を図 2 のように変形しても積分の値は変わらず，無限遠点の周りを負の向きに回る複素積分にまで変形できる．無限遠点での留数は，$\operatorname*{Res}_{z=\infty}f(z)=-\operatorname*{Res}_{w=0}f(1/w)/w^2$ であることから，簡単な計算により (11) の右辺を得る．

もちろん，両者は等しいので (11) が得られた．ほぼ同じ方針で，次のような恒等式を示すことも

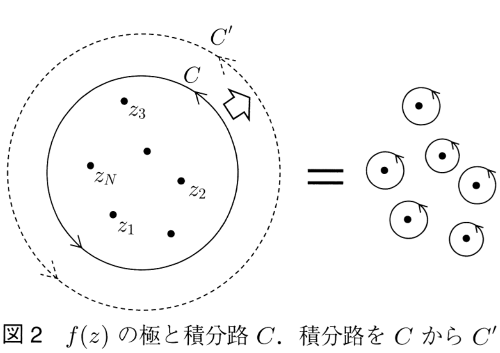


図 2　$f(z)$ の極と積分路 C．積分路を C から C' に変えても，$\oint f(z)\frac{\mathrm{d}z}{2\pi\mathrm{i}}$ の値は変わらない．

できるので，興味のある方には挑戦して頂きたい．

問題[8)]：任意の複素数 $q, z_1, \cdots, z_N$ について，

$$\sum_{i=1}^{N} \prod_{\substack{1\le j\le N \\ j\ne i}} \frac{q-z_j}{z_i-z_j} = 1. \tag{13}$$

5. サイン二乗変形

留数積分の応用は，松原周波数に関する和の計算[9)]など量子統計力学の問題にはよく顔を出し，さほど目新しいものではない．実は，(11) はもっと思いがけないところに現れる．ある 2 つの異なる 1 次元量子系の基底状態（最低エネルギー状態）が等しいという事実から浮かび上がってくるのだ．

まず以下のようなハミルトニアンを考える．

$$\mathcal{H}_0 = -\sum_{j=1}^{L} t(c_j^\dagger c_{j+1} + c_{j+1}^\dagger c_j). \tag{14}$$

ここで $c_j^\dagger$ (c_j) は，図 3 (a) のリングの格子点 j にフェルミオンを生成（消滅）する演算子で，反交換関係を満たす．また，$c_{L+1}^{(\dagger)} = c_1^{(\dagger)}$ の**周期的境界条件**を課す．この模型はタイトバインディング模型としてよく知られている．$\mathcal{H}_0$ はフーリエ変換により簡単に対角化され，$d_k := \sum_{j=1}^{L} e^{-\mathrm{i}kj} c_j/\sqrt{L}$ により

$$\mathcal{H}_0 = \sum_k \epsilon(k) d_k^\dagger d_k, \quad \epsilon(k) = -2t\cos k \tag{15}$$

と表せる．ここで波数 k ($-\pi \le k < \pi$) の値は周期的境界条件から $2\pi/L$ の整数倍に限られ，$\epsilon(k)$ は $\mathcal{H}_0$ の一粒子の固有エネルギーである．

この系の多粒子基底状態を求めよう．以下では簡単のため L を偶数とし[*5)]，粒子数 $N = L/2$ の場合を考える．このとき $\mathcal{H}_0$ の基底状態は，$\epsilon(k)$ が負の k にすべてフェルミオンを詰めた状態

$$|\mathrm{FS}\rangle = \prod_{k \text{ s.t. } \epsilon(k)<0} d_k^\dagger |0\rangle \tag{16}$$

となる．この状態は**フェルミの海**と呼ばれる．

さて，次に $\mathcal{H}_0$ の変種として (14) 中の飛び移り積分 t が以下のように空間的に変調しているハミルトニアンを考えよう．

$$\mathcal{H}_{\mathrm{SSD}} = -\sum_{j=1}^{L} t_j(c_j^\dagger c_{j+1} + c_{j+1}^\dagger c_j), \tag{17}$$

$$t_j = t\sin^2(\pi j/L). \tag{18}$$

この系を $\mathcal{H}_0$ の**サイン二乗変形**（**SSD**）と呼ぶ[10)]．その名の所以はもちろん t_j の関数形からである．また $t_L = 0$ となることから，$\mathcal{H}_{\mathrm{SSD}}$ にはサイト L と 1 を繋ぐホッピングが存在しない，つまり開放端をもつことが分かる（図 3 (b)）．

SSD は元々，1 次元系の数値計算において端の効果を軽減するためのスムーズ境界条件として導入されたものであるが，引原・西野は実は $\mathcal{H}_0$ と $\mathcal{H}_{\mathrm{SSD}}$ の多体の基底状態は数値的にはほぼ等しいことに気づいた[11)]．SSD のような非一様かつ開放端を持つ系の基底状態が，一様周期系 $\mathcal{H}_0$ の基底状態と一致することはにわかには信じがたいが，以下のようにして解析的に示すことができる[12, 13)]．まず $\mathcal{H}_{\mathrm{SSD}}$ を，半角の公式を用いて次のように 3 つの項の和で書き直す．

$$\mathcal{H}_{\mathrm{SSD}} = \frac{1}{2}\mathcal{H}_0 - \frac{1}{4}(\mathcal{H}_+ + \mathcal{H}_-), \tag{19}$$

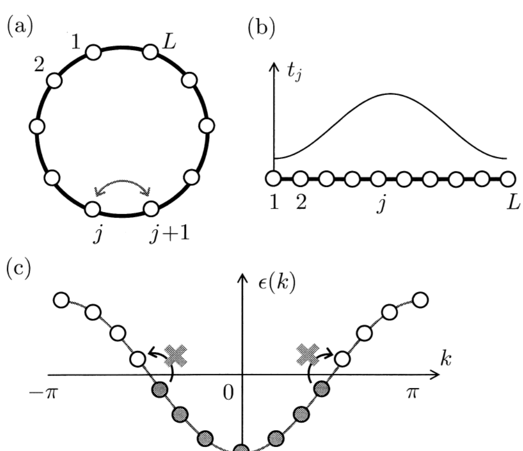


図 3　(a) リング状の格子とその上でのホッピングのイメージ（矢印）．(b) 開放端を持つ 1 次元格子．飛び移り積分 t_j は格子点 j に依っている．(c) $\mathcal{H}_0$ の基底状態 $|\mathrm{FS}\rangle$．$\mathcal{H}_\pm$ による遷移はフェルミの海の端では起こらない．

*5)　正確には，以下では $L = 4n+2$ ($n \in \mathbb{N}$) を想定している．

$$\mathcal{H}_\pm = -t\sum_{j=1}^{L} e^{\pm \mathbf{i}\delta j}(c_j^\dagger c_{j+1} + c_{j+1}^\dagger c_j). \quad (20)$$

ここで $\delta = 2\pi/L$ である．$\mathcal{H}_0$ はもちろん波数空間では対角的だが，$\mathcal{H}_\pm$ はそうではない．しかし，「あえて」d_k を用いて $\mathcal{H}_\pm$ を表すと

$$\mathcal{H}_\pm = e^{\mp \mathbf{i}\delta/2}\sum_k \epsilon(k \mp \delta/2) d_k^\dagger d_{k\mp\delta} \quad (21)$$

となることに気づく．

このことから，$\mathcal{H}_\pm$ は波数空間で，ある波数 k のフェルミオンを，それぞれ $k\pm\delta$ の波数に移す作用をすることが分かる．ただしその遷移振幅は波数ごとに異なっている．この $\mathcal{H}_\pm$ を (16) で求めた多体の基底状態 $|\mathrm{FS}\rangle$ に作用させてみよう．まずフェルミの海の中では，パウリの排他律のためフェルミオンたちは身動きがとれず，$\mathcal{H}_\pm$ は何の遷移も引き起こさない．したがって，$\mathcal{H}_\pm$ が非自明に作用する可能性があるのは，唯一フェルミ面 $(k = \pm\pi/2)$ をまたぐときだけである．しかし，ここでは $\epsilon(\pm\pi/2) = 0$ であるため，遷移振幅はゼロになっている（図 3 (c)）．よって，$\mathcal{H}_\pm|\mathrm{FS}\rangle = 0$ であり，(19) から $|\mathrm{FS}\rangle$ は $\mathcal{H}_{\mathrm{SSD}}$ の固有状態であることが分かる．さらに，ペロン・フロベニウスの定理を用いると，$|\mathrm{FS}\rangle$ が $\mathcal{H}_{\mathrm{SSD}}$ の基底状態であることも示せる[7]．

6. 恒等式 (11) 再び

$\mathcal{H}_0$ と $\mathcal{H}_{\mathrm{SSD}}$ の基底状態の等価性を示すには，$\mathcal{H}_\pm|\mathrm{FS}\rangle = 0$ という関係式が重要であったが，このことを波数空間ではなく実空間で見てみよう．基底状態 (16) から，実空間での多体の波動関数は，以下のように**スレーター行列式**で表される．

$$\Psi(x_1, \cdots, x_N) = \det[e^{\mathbf{i}k_i x_j}]_{i,j=1,\cdots,N}. \quad (22)$$

ここで $x_1, x_2, \cdots, x_N$ はフェルミオンのいるサイトを意味し，$k_i = \delta(N-2i+1)/2$ は $\epsilon(k) < 0$ を満たす波数 k である．$x_i = x_j$ となる場合は $\Psi = 0$ となり，また x_i と x_j の入れ替えに関して Ψ は反対称であるので，フェルミオンの波動関数としての性質を満たすことが分かる．(22) はさらに，新たな変数 $z_j = \exp(\mathbf{i}\delta x_j)$ を導入すると

$$\Psi(z_1, \cdots, z_N) = \left(\prod_{i=1}^{N} z_i\right)^{-\frac{N-1}{2}} \prod_{1\le i<j\le N} (z_i - z_j) \quad (23)$$

と書けることが分かる．ここでファンデルモンド行列式と差積の関係を使った．

いよいよ，恒等式 (11) との関係に迫ろう．導出は文献 7) に譲るが，実空間での $\mathcal{H}_+$ の表示 (20) から，$\mathcal{H}_+|\mathrm{FS}\rangle = 0$ は $\Psi(z_1, \cdots, z_N)$ について

$$\sum_{i=1}^{N} z_i (T_{q,z_i} + q^{-1} T_{q^{-1},z_i}) \Psi(z_1, \cdots, z_N) = 0 \quad (24)$$

が成り立つことを意味する．ただし $q = e^{\mathbf{i}\delta}$, T_{q,z_i} は Ψ の引数のうち z_i だけを qz_i に置き換える演算子である．$\mathcal{H}_-|\mathrm{FS}\rangle = 0$ についても同様の表式が得られる．T_{q,z_i} の (23) への作用を計算し，(24) の両辺に Ψ^{-1} を掛けると，最終的に以下の恒等式が得られる*6)．

$$\sum_{i=1}^{N} z_i \prod_{\substack{1\le j\le N \\ j\ne i}} \frac{z_i - q z_j}{z_i - z_j} = \sum_{i=1}^{N} z_i \prod_{\substack{1\le j\le N \\ j\ne i}} \frac{z_i - q^{-1} z_j}{z_i - z_j}. \quad (25)$$

この式で左辺は q に，右辺は q^{-1} にしか依っていないことから，もしこの等式が成り立つならば，両辺は q に依存しないと考えられる．したがって，形式的に $q=1$ を代入すれば (11) が得られる．もちろん，ここで N と $q, z_1, \cdots, z_N$ は関係付いてしまっているので，これでは証明になっていないのだが，実はこのようにして SSD の性質を調べていた際に副産物として，(11) に気付いたのである．

おわりに

以上紹介した例では，相互作用のない同種粒子系の性質を数学の問題として読み替えることで，非自明な恒等式を得ることができた．最近では，XXZ スピン鎖のような，もっと難しい量子多体系に関連した組合せ論の面白い結果も多く得られている[14]．また，超対称性のある格子模型も，量子

*6) 途中の計算では，$q^{\pm N/2} = \exp(\pm\mathbf{i}\delta N/2) = \pm\mathbf{i}$ を用いる．

多体系と組合せ論の結びつきの宝庫である[15)]．そこでは，大分配関数ではなくウィッテン指数と呼ばれる母関数が重要な役割を果たす．

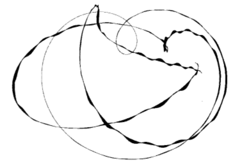
後半に紹介したSSDは，元々は多体系の数値計算において技術的な理由で導入されたものであったが，自由フェルミオンの場合には基底状態が厳密に求まり，(11) のような総和則との不思議な出会いがあった．この手の総和則は，マクドナルド多項式[16)]の理論などではお馴染みのものである．(11) とは別の総和則から，SSD とは異なる変形を構成できないか．あるいは，逆に他の量子系から，今まで誰も見つけたことのないような恒等式を発見できないか…とついつい夢想してしまう．

参考文献

1) 野海正俊：『オイラーに学ぶ』，日本評論社 (2007).
2) 山田裕史：『組合せ論プロムナード』，日本評論社 (2009).
3) 標準的な教科書として，田崎晴明：『統計力学 I，II』，培風館 (2008).
4) M. Stone ed., *Bosonization*, World Scientific (1994).
5) 川上則雄，梁成吉：『共形場理論と 1 次元量子系』，岩波書店 (1997).
6) F.D.M. Haldane: *J. Phys. C* **14**, 2585–2609 (1981).
7) H. Katsura: *J. Phys. A: Math. Theor.* **44**, 252001 (2011).
8) 堀田良之，渡辺敬一，庄司俊明，三町勝久：『代数学百科 I—群論の進化』，朝倉書店 (2004) 第 4 章.
9) 標準的な具体例は，永長直人：『物性論における場の量子論』，岩波書店 (1995) の 3・4 章に見出せる.
10) SSD の導入や研究の経緯に関する解説として，引原俊哉，桂法称，丸山勲，西野友年：日本物理学会誌 **67**, 394–398 (2012).
11) T. Hikihara and T. Nishino: *Phys. Rev. B* **83**, 060414 (R) (2011).
12) I. Maruyama, H. Katsura, and T. Hikihara: *Phys. Rev. B* **84**, 165132 (2011).
13) H. Katsura: *J. Phys. A: Math. Theor.* **45**, 115003 (2012).
14) 岡田聡一：数理科学 2008 年 12 月号 33–39.
15) P. Fendley, K. Schoutens, and J. de Boer, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 120402 (2003).
16) 白石潤一：『量子可積分系入門』SGC ライブラリ vol.**28**, サイエンス社 (2003).

（かつら・ほうしょう，学習院大学理学部）

物性物理学と統計力学



加藤　雄介

1. はじめに

統計力学の意義の一つは物質の微視的な物理的性質（ハミルトニアン）を出発点に，熱力学的性質を導くアルゴリズムを提供することにある．もう一つの意義は，物質の熱力学的性質に対する物理的描像を与えることにある．本記事では，ゴム弾性，磁性体，超伝導体を例に，「もの」の性質を理解する際の統計力学の「使われ方」を紹介する．

2. ゴム弾性[1)]

統計力学の切れ味を紹介するには，ゴム弾性は定番ながら恰好の例である．熱力学を学ぶ際，気体を扱うことがほとんどなので，断熱膨張（圧縮）すれば，温度が下がる（上がる）のはあたりまえに思えてしまう．一方 **(i) ゴムを急激に伸ばして，唇をあててみるとあたたかい感触が伝わり，温度が上がる**ことがわかる．断熱膨張して，温度が上がるのであるから気体とは逆である．また **(ii) ゴムをピンと伸ばして長さを固定したまま温めるとゴムは固くなる（縮もうとする力が大きくなる）**．

熱力学は (i), (ii) が関連していることを教えてくれる．ゴムを単純化して「ばね」として扱う．ばね定数 k に温度依存性があるとして $k(T)$ と書く．この系の熱力学的性質は長さ x，温度 T のときのヘルムホルツの自由エネルギー $F(T,x)$ が与えられればすべて決まる（完全熱力学関数[2~4)]）．その全微分は，

$$\Delta F = -S(T,x)\Delta T + k(T)x\Delta x \qquad (1)$$

で与えられる．ここで $S(T,x)$ はエントロピーである．$\frac{\partial^2 F}{\partial T \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial T}$ より

$$\frac{\partial S}{\partial x} = -x\frac{dk(T)}{dT} \qquad (2)$$

となる．長さ x 一定の下でのエントロピーを温度の関数として図示すると図 1 のようになる．各 S–T 曲線の傾きが x 一定の下での熱容量と温度の比となるので，曲線は右肩上がりになる．上記 (ii) の性質，すなわち $\frac{dk(T)}{dT} > 0$ が成り立つとすると，(2) から $\frac{\partial S}{\partial x}|_T < 0$，すなわち，温度一定の下で，$x$ を増やしていくと，エントロピーが減少するから x が小さい場合の曲線がグラフ上方にくることになる．状態 A から出発して，断熱的=エントロピー一定に保ったまま，x を大きくしていくと，温度は上昇すること，すなわち (i) が導かれる．

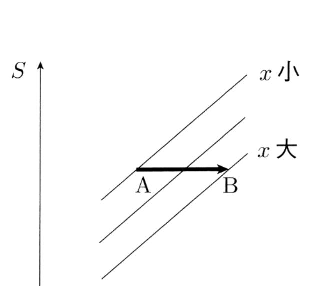


図 1　ゴム弾性模型のエントロピーの温度依存性.

しかし熱力学からは $\frac{dk(T)}{dT}$ または $\frac{\partial S}{\partial x}|_T$ の符号は決まらないので，**(i), (ii) それぞれを単独に導くことはできない．**それを可能にするのが統計力学である．

ゴム弾性を表す模型として最も単純なものは 2 状態を取り得るモノマー（単量体）が N 個つらなった鎖状物質である．モノマーは左向き，右向きを自由にとれるものとしてそれぞれの個数を N_+, $N_-(= N - N_+)$ とする．一番長い状態は $N_+ = N$ または $N_- = N$ の状態であるが，これに対応する微視的な状態はそれぞれ一つである．一般の N_+ に対する微視的な状態の数は

$$\frac{N!}{N_+!N_-!} \tag{3}$$

であり，N を偶数とすると $N_+ = N_- = \frac{N}{2}$ のとき最大である．このとき長さは最小 $(x = 0)$ となる．すなわちエントロピー S は x の減少関数である．**場合の数を稼ぐために折り畳まろうとするのがゴム弾性の起源であり，上記 (i), (ii) の現象の由来である．**

3. 磁性体[5)]

熱を加えれば温度は上がり，除けば温度は下がるというのは日常感覚だが，前節のように熱の出入りなく，温度が変化する過程は興味深い．熱力学第二法則によれば，「ものは温めるより冷やす方が難しいことが多い」[3)]．ヘリウムの液化をめぐる約 100 年前の研究，90 年代の冷却原子系におけるボース・アインシュタイン凝縮の実現は様々な技術を駆使した最先端の研究であった．「熱を用いず冷やす」プロトタイプとして常磁性体の断熱消磁について説明する．

磁性体の熱力学的性質はヘルムホルツの自由エネルギー $F(T, M)$ を温度 T と磁化 M の関数として求められれば決定される．全微分形式では，

$$\Delta F = -S(T, M)\Delta T + H\Delta M. \tag{4}$$

ここで H は磁場である．H を M と磁化率 χ で，$H = \frac{M}{\chi(T,M)}$ と表したとき，

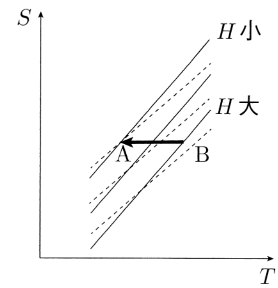


図 2　常磁性体のエントロピーの温度依存性.

$$\Delta F = -S(T, M)\Delta T + \frac{M}{\chi}\Delta M \tag{5}$$

となるので，(1) と (5) を比べると

$$x \longleftrightarrow M, \quad k \longleftrightarrow \frac{1}{\chi} \tag{6}$$

と対応することがわかる．常磁性体では広い温度領域で $\chi \propto \frac{1}{T} > 0$ というキュリーの法則が成り立つことが知られている．これは $\frac{dk(T)}{dT} > 0$ と対応するわけであるから，(6) の対応を用いれば，図 1 が常磁性体でもそのまま成り立つ．磁性体の場合に制御できるのは M というより H であるから，図 1 に相当する図を常磁性体に対して作ったものが図 2 である．点線で示したのが M 一定の線，実線が H 一定の線である．H 一定の線が右肩上がりであるのは，傾きが H 一定の熱容量を T で割ったものであるからである．M 一定の線に沿って，温度を上げていくと，$\frac{1}{\chi}$ が大きくなるので，H も大きくなる．したがって，H 一定の線の傾きは，M 一定の線のそれより大きくなる．よって図のようになる．あらかじめ H をかけておいて，状態 B を実現し，そこからエントロピー一定のまま磁場を小さくしていき状態 A を実現すると，温度は下がる．これが断熱消磁である．今の場合も，$\left(\frac{\partial S(T,M)}{\partial M}\right)_T$ の符号がカギになるが，熱力学からは，それが $\frac{\partial \chi^{-1}}{\partial T}$ と逆符号であることが言えるのみである．

$\left(\frac{\partial S(T,M)}{\partial M}\right)_T > 0$ を説明する単純化模型を考えてみる．磁気モーメントが N 個集まっていて，それぞれの磁気モーメントは，H に平行，または反平行の 2 通りの状態を取り得るものとする．H の

向きのものが N_+ 個，反対向きのものが N_- 個あるとする．このときの場合の数は，(3) で与えられ，前節の議論と同様に S が M の減少関数であることが導かれる．

4. 超伝導[6, 7]

これまでの 2 つの例（実質的には一つの例）は統計力学の教科書では定番の題材である．研究の現場で熱力学，統計力学がどのように用いられているかを見るには超伝導の熱・統計力学は良い題材である．超伝導の熱力学的性質については高温超伝導（銅酸化物超伝導体）の発見（1986 年）を契機に 1990 年代に理解が深まった．以下では高温超伝導体までとそれ以後わかったことを分けて紹介する．

4.1 高温超伝導以前

超伝導体は，電気抵抗がゼロになる現象として約 100 年前に発見された．今では 1933 年に発見されたマイスナー・オクセンフェルト効果のほうが本質であると認識されている．この効果は，超伝導体が磁場を物質内部から排除する効果であり，超伝導を記述する秩序変数 Ψ が電荷 $2e$ を持つ粒子のマクロな波動関数のように振る舞い，マクロな反磁性電流を生じることによって起こると理解されている．超伝導体には 2 つの長さスケールがある．その一つ $\xi(T)$ は超伝導状態の秩序変数の空間変化の典型的スケールであり，**コヒーレンス長**と呼ばれる．マイスナー効果を示すとはいっても，超伝導体に磁場をかけたとき，物質表面からある程度の深さまでは磁場が侵入する．その長さスケール $\lambda(T)$ を**磁場侵入長**（**あるいは単に侵入長**）と呼ぶ．$\xi(T), \lambda(T)$ は温度に関して増加関数であり，$T = T_{\rm c}$（**ゼロ磁場のときの転移温度**）で発散する．この予備知識をベースに以下議論を進めていこう．

超伝導と磁場は相性が悪い（競合する）．超伝導体に強い磁場をかけると超伝導が壊れて，（抵抗がゼロでない）常伝導金属になる．したがって磁場と温度を変数に相図を書くと，低温・低磁場が超伝導状態，高温・高磁場が常伝導状態となり，単純に考えると図 3 のようになる．このような相図を持つ超伝導体を**第一種超伝導体**という．相境界を与える磁場（**熱力学的臨界磁場**）$H_{\rm c}$ は磁束量子 $\phi_0 = \frac{h}{2e}$ と，超伝導体が持つ 2 つの特徴的な長さ $\xi(T), \lambda(T)$ を用いて，

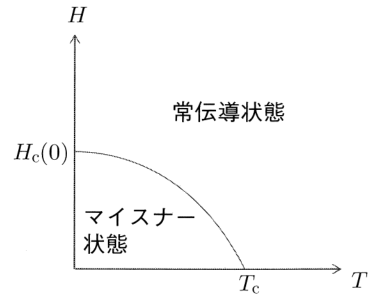


図 3　第一種超伝導体の相図．

$$H_{\rm c}(T) \sim \frac{\phi_0}{\xi(T)\lambda(T)} \tag{7}$$

で与えられる（[磁場] = [磁束]/[面積] であることに注意）．

さて図 3 のような相図を持たない超伝導体も数多く発見されている．むしろ現在ではそのような超伝導体のほうが主な研究対象になっている．図 3 を描く際には，熱平衡状態として，常伝導または超伝導の均質相のどちらかが実現し，両者の共存相が安定になることはないと仮定してきた．この仮定は，超伝導相と常伝導相の境界における界面張力 γ が正である場合には正しい．実際には

$$\begin{aligned} &\lambda < \frac{\xi}{\sqrt{2}} \text{のとき} \gamma > 0 \quad \text{第一種超伝導}, \\ &\lambda > \frac{\xi}{\sqrt{2}} \text{のとき} \gamma < 0 \quad \textbf{第二種超伝導} \end{aligned} \tag{8}$$

となり，超伝導は 2 つのタイプに分けることができる．第二種超伝導体では，超伝導相と常伝導相の界面が多ければ多いほどエネルギーが下がるので，$H = H_{\rm c}(T)$ 付近を中心に，超伝導相と常伝導相の混合相が実現する．これを**混合状態**または**渦糸状態**と呼ぶ．第二種超伝導体の相図は図 4 のようになると高温超伝導体発見の頃までは考えられていた．渦糸状態と他の相の間の相境界は 2 つの特徴的な磁場

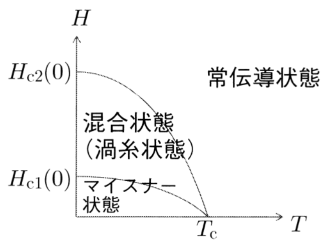


図 4　第二種超伝導体の相図.

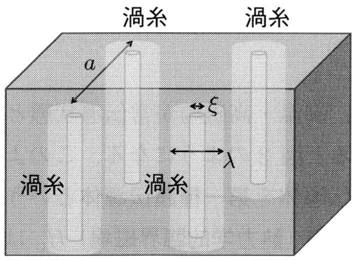


図 5　渦糸状態.

$$
\begin{aligned}
H_{c1}(T) &\sim \frac{\phi_0}{\lambda^2(T)} \quad \text{下部臨界磁場}, \\
H_{c2}(T) &\sim \frac{\phi_0}{\xi^2(T)} \quad \text{上部臨界磁場}
\end{aligned}
\tag{9}
$$

で与えられる.

混合状態では，常伝導相では，磁場が入り，超伝導相では磁場が排除されると考えると，超伝導相，常伝導相ともに磁場方向には一様な状態となっていると期待される（図 5 参照）．超伝導相と常伝導相の界面をできるだけ持った状態が安定になるはずである．再現なく細かい構造ができるわけではなく，超伝導の秩序変数 Ψ は，コヒーレンス長 $\xi(T)$ よりは急激に変化できるわけではないので，渦糸状態における常伝導相は，半径 $\xi(T)$ の円形断面を持つ柱状領域となる．常伝導柱状領域を貫く磁束を遮蔽するべく，渦状の電流が柱状領域に巻きつくように流れるので，この領域は**渦糸**と呼ばれる．

渦糸の存在によって超伝導領域は多重連結になるので，常伝導領域を貫く磁束は磁束量子 ϕ_0 の整数倍に限られる（**磁束の量子化**）．できるだけ細かい構造を作り界面エネルギーを稼ぐために，常伝導の各柱状領域を貫く磁束は許される最小値 ϕ_0 を取る．磁場に垂直な断面における単位面積当りの渦糸の本数は $\left|\frac{\phi_0}{B}\right|^{\frac{1}{2}}$ で与えられる．よって**渦糸＝量子磁束**とみなすこともできるが，実際には，磁場は超伝導領域に λ 程度の深さまで浸み出している．磁場はなるべく空間的に均一になろうとする傾向があるので，渦糸間には反発力が働き，三角格子構造がエネルギー的に安定になる．この構造を**渦糸格子**または**アブリコソフ格子**と呼ぶ．格子間隔 $a \sim \left|\frac{\phi_0}{B}\right|^{\frac{1}{2}}$ は磁場 1 T のとき，約 50 nm（500 Å）と長周期である．

表 1　磁場中超伝導の相と秩序（平均場近似の場合）.

$H_{c2} < H$	常伝導相	$\Psi = 0$	$\rho_{\boldsymbol{G}} = 0$
$H_{c1} < H < H_{c2}$	渦糸相	$\Psi \neq 0$	$\rho_{\boldsymbol{G}} \neq 0$
$H < H_{c1}$	マイスナー相	$\Psi \neq 0$	$\rho_{\boldsymbol{G}} = 0$

図 4 に現れた各相は秩序数または長距離秩序で特徴づけられる．超伝導相は，巨視的波動関数 Ψ の存在あるいは，その（ゲージ不変な）相関関数が長距離相関を持つことで特徴づけられる．混合状態は，渦糸が三角格子構造を取ることによって，超伝導秩序変数の密度も空間的に周期的になる．その場合，通常固体の Bragg 散乱の強度に相当する

$$
\rho_{\boldsymbol{k}} = \lim_{V\to\infty} \frac{1}{V} \int |\Psi(\boldsymbol{r})|^2 \exp[\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}]\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{10}
$$

（V は体積）が特定の $\boldsymbol{k}(=\boldsymbol{G})$（逆格子ベクトル）で有限の値を取る．渦糸間に位置の長距離相関がなければ $\boldsymbol{k}=0$ 以外では $\rho_{\boldsymbol{k}} = 0$ となる．図 4 は巨視的波動関数に関する**ギンツブルグ・ランダウ理論**（2 次相転移の現象論），いわゆる平均場理論で導かれる．$\Psi(\boldsymbol{r})$ と $\rho_{\boldsymbol{G}}$ で各相を特徴づけると表 1 のようになる．渦糸状態は，格子秩序と超伝導秩序の両方を持ち合わせた相と特徴づけられる．ここまでが高温超伝導体（銅酸化物超伝導体）発見の頃までの一般的理解であった．

4.2 高温超伝導以後

4.1 節で概観した超伝導体の熱力学的性質の理解は，1986 年の銅酸化物超伝導体の発見が契機となって，状況が一変する．平均場近似の妥当性を確かめるためにしばしば行われる有効な確認法は，秩序変数の平均場近似における値まわりのゆらぎの分散を求めることである．3 次元系においては，相転移点のまわりの臨界現象の性質が変更を受け

るものの，相転移自体の存在自体は生き残ることも多いが，低次元系になると，一般に平均場近似からのずれが大きく，場合によっては秩序相そのものが消失し，相図が大きく変わってしまう場合がある．

さて，磁場中の 3 次元系超伝導体で平均場近似からのずれを計算すると，超伝導秩序変数の期待値がゼロになる．あるいは超伝導相関関数が短距離秩序になることが見出された．**渦糸状態は超伝導状態ではないのである．**

低次元系でもないのに，なぜゆらぎが大きくなり平均場近似が破綻してしまうのか，一見すると不思議である．実際，ギンツブルグ・ランダウ理論の範囲内では，渦糸状態における低エネルギー励起は，渦格子の変形モードであり，低エネルギーのゆらぎを記述する有効エネルギーは連続体近似した弾性体理論

$$\mathcal{H}_{\rm el} = \frac{1}{2}\int {\rm d}\boldsymbol{r}\left\{c_{11}\left(\nabla_\perp\cdot\boldsymbol{u}\right)^2 + c_{66}\left(\nabla_\perp\times\boldsymbol{u}\right)^2 + c_{44}\left(\partial_z\boldsymbol{u}\right)^2\right\} \tag{11}$$

で与えられる．c_{11}, c_{66}, c_{44} は弾性定数で，$\nabla_\perp \equiv (\partial_x, \partial_y), \partial_z$ は，磁場の方向（ここではそれを z 軸にとる）と垂直な方向と平行な方向に ∇ を分解したものである．$\boldsymbol{u}$ は渦糸の変位を表す 2 成分ベクトル場 $(u_x(\boldsymbol{r}), u_y(\boldsymbol{r}))$ である．1 次元，2 次元固体は有限温度で長距離秩序を持ち得ないが，3 次元固体は存在し得る．(11) を用いて，変位ベクトルの熱ゆらぎの大きさ $\langle\boldsymbol{u}^2\rangle$ を評価するとは有限になる（1 次元，2 次元では発散する）．

渦糸固体秩序があるにも関わらず，超伝導秩序が壊れてしまうのは，超伝導秩序のゆらぎと，固体秩序のゆらぎで感じる次元の感じ方が異なることに由来する．

先に述べたように超伝導の秩序変数は，電荷 $2e$ の荷電粒子の波動関数と似た性質を持つ．荷電粒子の一粒子エネルギースペクトルは，磁場に垂直な面内に運動についてはランダウ準位に量子化されるので，実効的に 3 次元系が 1 次元系に落ちてしまう．今の場合は，自由エネルギーの中に秩序変数についての 4 次の項（相互作用項）が含まれ

ているので，今述べた描像はやや単純化しすぎではあるが，大筋はそのように理解できる．

もう少し説明すると，渦糸は超伝導秩序によっての位相欠陥であるから，秩序の破壊に最も効く．渦糸の変位のゆらぎと超伝導秩序の位相ゆらぎ $\delta\phi(\boldsymbol{r})$ の間には

$$\nabla_\perp^2 \delta\phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{2\pi}{a^2}\left(\nabla_\perp \times \boldsymbol{u}\right) \tag{12}$$

の関係があり，渦糸の変位場のうち，せん断変形が超伝導秩序の位相ゆらぎと結びついているわけである．これを用いて，有効ハミルトニアンの位相ゆらぎに関する部分を取り出すと

$$\mathcal{H}_{\rm el} \sim \frac{a^4}{2(2\pi)^4}\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\left\{c_{66}(\nabla_\perp^2\delta\phi)^2 + c_{44}(\nabla_\perp\partial_z\delta\phi)^2\right\} \tag{13}$$

となり，空間微分の階数が 2 だけ大きくなる．一般に空間微分のべきが大きくなると，長波長，すなわち低エネルギーゆらぎの状態密度が増えてゆらぎが大きくなる．

低エネルギーの状態密度を増やす機構は，空間次元を下げる方向（空間 d 次元の自由粒子の 1 粒子状態密度がエネルギーの $\frac{d-2}{2}$ 乗で与えられることを思い出してほしい）と，今回の場合のように有効ハミルトニアンにおいて，ゆらぎの場の空間微分の階数を上げる方法がある．後者の例は，液晶のスメクティック相のゆらぎの有効ハミルトニアン（ランダウ・パイエルスの自由エネルギー）にもみられる．

渦糸状態で，超伝導秩序だけ壊れて，渦糸格子の秩序だけ生き残るからくりは上記のように理解された．では渦糸格子の秩序は，渦糸状態ではいつでも生き残るのであろうか．渦糸格子の相転移点（相転移線）の決定は，分子動力学法またはモンテカルロ法などの数値計算に頼らざるを得ないが，弾性体理論に基づく簡便な目安として通常の固体液体転移におけるリンデマンの評価法

$$\sqrt{\langle \boldsymbol{u}^2 \rangle} \sim 0.1a \tag{14}$$

を用いる（a は格子定数）．3 次元系固体では変位の平均振幅は有限であるが，温度と共に増大する．

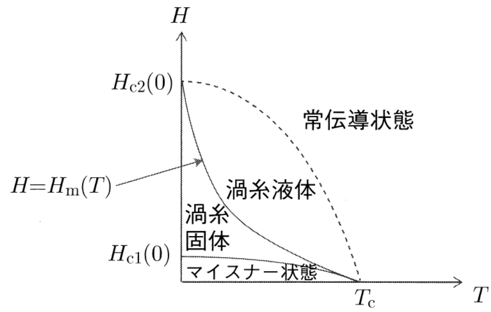


図 6　第二種超伝導体の相図（平均場近似を超えた結果）．

平均振幅が格子間隔（今の場合は渦糸間隔）の 10% 程度のところで，固体の融解が起きるという経験的判定法である．その結果に基づく簡略化した相図を図 6 に掲げておく．$H = H_{\rm m}(T)$ の曲線が，渦糸固体の融解転移線を表している．

また三角格子の場合，（秩序変数 $\rho_{\boldsymbol{G}}$ が空間並進に関して 3 次の不変量を持つので 1 次転移になるというギンツブルグ・ランダウ理論の結果を信じると）1 次転移になると期待される．リンデマンの評価法にしても，1 次転移であろうという結論にしてもずいぶん大胆に思えるが，銅酸化物超伝導体の実験で，これらの議論が定性的には正しいことが確認されている．

融解転移よりも高温高磁場の領域はどんな領域であろうか．$\Psi = 0, \rho_{\boldsymbol{G}} = 0$ であるから対称性の観点からすれば常伝導状態といってもよい．実際には $H_{\rm c2}$ は相転移線ではないが，そこを境にエントロピーが有意に（低温低磁場に向かって）減少する**クロスオーバー**線としての意味を持っている．よって $H_{\rm m} < H < H_{\rm c2}$ の領域は**渦糸液体**領域と呼ばれる．その相図と各相を特徴づける秩序変数を図 6 と表 2 に掲げる．$H = H_{\rm m}(T)$ の曲線が，相図中，右下がりの曲線をなしていることに注目してほしい．縦軸を圧力と読み替えると氷と水の相図に似ている．実際，渦糸の密度は，渦糸液体状態のほうが渦糸固体状態より高いことが，クラウジウス・クラペイロンの関係式

$$\frac{B_{\rm solid} - B_{\rm liquid}}{S_{\rm solid} - S_{\rm liquid}} = -\frac{dH_{\rm m}(T)}{dT} \tag{15}$$

からわかる．$B_{\rm solid(liquid)}$ と $S_{\rm solid(liquid)}$ はそれ

表 2　磁場中超伝導の相と秩序（平均場近似を超えた結果）.

$H_{c2} < H$	常伝導相	$\Psi = 0$	$\rho_G = 0$
$H_{c2} < H < H_m$	渦糸液体相	$\Psi = 0$	$\rho_G = 0$
$H_{c1} < H < H_{c2}$	渦糸固体相	$\Psi = 0$	$\rho_G \neq 0$
$H < H_{c1}$	マイスナー相	$\Psi \neq 0$	$\rho_G = 0$

ぞれ，融解曲線上の物質内部の磁場の平均値とエントロピー S を表す（下付き添え字は solid は固体，liquid は液体を表す）.

1990 年代当時，次々に出版される論文を見て，物理の本質をつかんでいる物理学者は，比較的単純な議論で，ここまでわかってしまうのかと思ったことを筆者は憶えている.

この結果は，多くの超伝導体の個々の性質によらず成り立つはずのものである．ただ，銅酸化物高温超伝導体以前では，平均場からのずれが小さかった．$H_{c2}(T)$ がクロスオーバー線であるとはいっても，そこでの比熱の温度変化は特異性はないものの急峻であり，渦糸格子融解線 $H_m(T)$ は $H_{c2}(T)$ に近くて，その 1 次転移を観測しようという動機すらなかったといっていい．さらに不純物によるピン止め効果によって渦糸固体相も変形を受けていたので，実験的にきれいな 1 次転移をみることは困難であった．高温超伝導体という一つの物質群の登場により，超伝導の物理全体の理解が深まったわけである．物性の個性を探求する物性科学と物質によらない普遍的性質の理解を目指す統計力学の出会いの面白さを存分に味わえたのが 1990 年代における高温超伝導体の相図に関する研究であり，ここに紹介した.

参考文献

1) 久保亮五『ゴム弾性』裳華房，1996.
2) 田崎晴明『熱力学』培風館，2000.
3) 佐々真一『熱力学入門』共立出版，2000.
4) 清水明『熱力学の基礎』東京大学出版会，2007.
5) K. メンデルスゾーン著，大島恵一訳『絶対零度への挑戦』講談社，1971.
6) T. Nattermann and S. Scheidl, Vortex-galass phases in type-II superconductors, *Advances in Physics*, **49:5**, 607–704 (2000).
7) 池田隆介『超伝導転移の物理』丸善出版，2012.

（かとう・ゆうすけ，東京大学大学院総合文化研究科）

経済物理

経済現象を統計力学で解析する



羽 田 野　直 道

巷で「ブラック・ショールズ」という名を耳にされた方も多いでしょう．この二人はある種の金融商品の「適正」価格の求め方を導いた功績でノーベル経済学賞を受けました．ところが，そのショールズ氏が参画した折り紙付きのはずのファンドが実は数年で倒産し，多くの人が大損害を被って米国政府が損失補填する騒ぎとなりました．

もしショールズ氏が大学学部程度の統計力学をかじっていたら，そんなことにはならなかったかも知れません．ブラックとショールズは「適正」価格を導く際に以下のような仮定をしているのです：「物の価格は通常のランダムウォークをし，したがって価格変動の頻度分布はガウス分布である」．**相転移の統計力学**を知っていれば，揺らぎがガウス分布するのは相互作用が無視できる高温極限でしかないことがわかったでしょう．

現実が高温極限ほど簡単でないことを物理学は明らかにしてきました．既に1960年代にマンデルブロ[1)]が，現実の価格変動がランダムウォークではなくフラクタル的であることを指摘しています．1990年代になってスタンレーのグループ[2)]が，価格変動の頻度分布がガウス分布ではなく**冪（べき）分布**であることを多くのデータで示して，経済物理と呼ばれる統計力学の一分野が盛んになりました．

冪分布とは，x の大きさの価格変動が起こる頻度が $x^{-\alpha}$ に比例する分布のことです（ここで α は冪分布を特徴付ける指数です）．ガウス分布と冪分布の違いは図1のように両対数プロットすると一目瞭然です．価格変動が冪分布すると，ブラックとショールズが仮定したより遙かに大きい暴騰や暴落が起こるはずであることがわかります．ガウス分布には「典型的な大きさ」というものがありますが，冪分布にはそれがありません．小さな価格変動が頻繁に起こる一方，いくらでも大きな価格変動も時には起こるというのが，冪分布の意味するところです．身長3メートルの人間はおそらく歴史的にも存在しなかったでしょうが，「想定外」の暴騰や暴落はこれまでに何度も起こってきました．

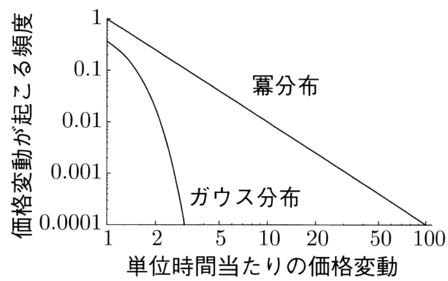


図1　ガウス分布 $\exp(-x^2)$ と冪分布（ここでは例として x^{-2}）の比較．

価格変動の冪分布が統計力学で興味を持たれるのには以下の2つの（互いに絡み合った）理由があります．まず，冪分布は相転移の統計力学にとってなじみ深い分布です．例えば2次元以上のイジング模型の臨界点直上では，上向きや下向きスピンがつくるクラスターの大きさが冪分布します．つ

まり平均的なクラスターサイズというものが存在しません．粗視化しても系が同じように見えるので，**スケール不変性**と言い換えてもいいでしょう．

もう一つの理由が**普遍性**です．イジング模型の臨界現象は，磁気相転移と液体気体相転移の両方で起こります．このように，一見全く異なる系で全く同じ現象が現れるのが普遍性です．非常に多くの自由度が互いに強く相関しているとき，どのような自由度がどのように相関しているかという詳細に依らない現象が観測されることが，大きな驚きを持って研究されてきました．このような普遍性が，多くの人間が互いに強く相互作用しながら起こす経済現象においても現れるのではないかという期待が，統計力学において経済物理が盛んに研究されるようになったもう一つの理由です．

「経済物理なんか物理じゃない！」という糾弾の声が多くの物理学者の間にあるのも事実です．その批判を分析してみると，どうやら「人間の自由意思」が関わる事象を物理として扱うことへの抵抗感があるように思います．しかし経済物理のポイントはまさに，個々人の自由意思という詳細に依存しない普遍性を見出そうとするところにあります．

さて，上に述べた臨界現象は温度などパラメータを調節することによって初めて臨界点に達します．一方で経済現象では，誰かがパラメータを調節しているから冪分布が現れるとは考えにくいです．実は統計力学においても，系が自動的に臨界点に行き着くという意味の**自己組織化臨界現象**という概念が提案されています．例として**砂山模型**があります．砂山に上から少しずつ砂粒を落とすと，時折，雪崩を起こしつつ砂山は成長します．雪崩の大きさの頻度分布が冪分布であると考えられています．経済活動における冪分布を自己組織化臨界現象で説明するというのが経済物理の目論見です．

そこで，価格変動の冪分布を再現する佐藤–高安模型[3]を紹介しましょう．多くのディーラーを考えます．各ディーラーは希望買値と希望売値を持っています．誰しも安く買って高く売りたいので，希望売値が希望買値より高いとし，簡単のため両者の差はどのディーラーでも常に同じとします（ここに普遍性の考え方が現れています．結果は模型の詳細に依らないと期待しています）．ディーラーは初期状態で買い手と売り手のどちらかに分かれます．買い手とは次に物を買いたいと思っているディーラーで，物を買えるまで希望買値を上げ続けます．一方で売り手は次に物を売りたいと思っていて，物が売れるまで希望売値を下げ続けます．

おおよそこのような規則（詳細は原論文を参照ください[3]）でディーラーが売値・買値を更新し続けます．買い手のうちで最大の希望買値と，売り手のうちで最小の希望売値が等しくなったとき，その買い手と売り手の間で取引が成立するとします．直後に二人は買値・売値の更新の向きを反転させ，買い手は売り手に，売り手は買い手に転じます．この模型が生成する取引価格の時系列で，価格変動の冪分布が確認されます．これだけ単純化された模型でも，多くのディーラーが互いに強く相互作用しているために，冪分布という臨界的かつ普遍的な振舞いが再現できると考えられます．

物理学は元々，この世は神が造り給うたものであることを証明するための学問でした．神ならすべてを統一的に支配する法則を造り給うたはずなので，物理学は常に統一法則を探し求めてきました．その意味で，普遍性は物理学の根幹に位置する概念なのです．経済物理は，その普遍性が自然界だけでなく人間界も支配していることを示しつつあるのかも知れません．

参考文献

1) B.B. Mandelbrot, *Fractals and Scaling in Finance*, Springer, 1997.
2) R.N. Mantegna and H.E. Stanley, *An Introduction to Econophysics*, Cambridge Univ. Press, 2000.
3) A.-H. Sato and H. Takayasu, *Physica A* **250**, 231–252 (1998).

（はたの・なおみち，東京大学生産技術研究所）

宇宙の進化と非平衡過程

吉田　直紀

1. 宇宙 138 億年の進化

最近の様々な宇宙観測の結果から，私たちの宇宙やその進化の歴史について多くのことが明らかになった．138 億年前にビッグバンとともに生まれた宇宙はその後急激に膨張を続け，数分という短い時間で元素を合成し，数億年という早期に天体が生み出され，すぐに光に満たされるようになった．誕生後 138 億年が経った現在の宇宙は，割合にして 73% もの暗黒エネルギーという得体の知れないものに満たされており，そのおかげで宇宙が膨張する割合は過去から現在に向かって加速度的に速くなっている．宇宙全体が膨張しているがために，日常に観察できる現象とは異なり，時には直観と反するような現象もしばしば起こった．本稿では膨張宇宙の中でどのようにして天体が生まれたのかを解説しながら，その要所要所で重要となった非平衡過程を紹介しよう．

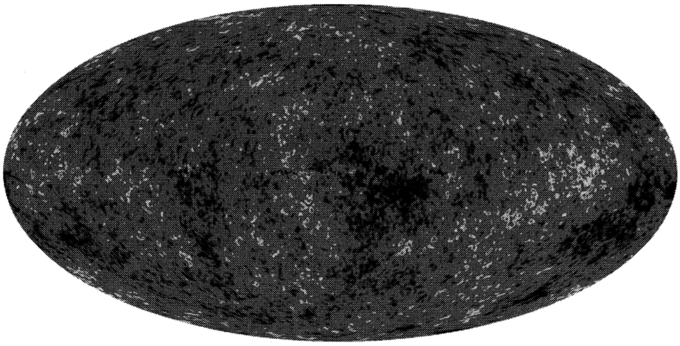
2. 平衡から非平衡へ

一般にどのような系も十分な時間が経過した後にはある種の平衡状態に落ち着くはずと予想するだろう．宇宙進化のように，時間の尺度が数億年，数十億年ともなるとなおさら十分な時間があり，全体としてゆっくりと平衡状態に向かって進化すると思われるかもしれない．しかし，興味深いことに，宇宙進化の中でも重要であったと考えられる現象の多くは，本質的には系が平衡状態からずれた結果として，あるいは何らかの非平衡過程が働いたために起こったものである．

初期宇宙は物質と輻射（電磁波）が熱平衡にあり，その証拠として，自然界でもっとも整った「黒体輻射」を現在の宇宙マイクロ波背景放射として観測することができる（図 1）．現在の宇宙は絶対温度にして 3 度程度という極めて低温の黒体輻射に満たされており，この事実こそが，宇宙はその創成時には高温高密度の「ホットビッグバン」の状態を経たことを裏付ける証拠となっている．物質と輻射とが一様に混ざった高温のスープのような状態だった初期宇宙は急激に膨張，冷却していたため，初めの数十万年の間にも実に様々なことが起こる．特に重要なのは元素合成と水素原子の生成による宇宙の晴れ上がりである．後者が起こった時期（宇宙年齢 37 万年の頃）の様子をマイクロ波背景放射として詳しく観測することができる．まずこの 2 つの過程から見ていこう．

3. 水素原子核が巡る旅

ある一つの水素原子核としてこれまでの宇宙の進化を克明に観察，いや文字通り体験してきたなら，実に様々な出来事があったと感慨深く思うことだろう．水素原子核を仮想的な観測者と見立てることに違和感を感じられるかもしれないが，実際，私たちの人体は重さにして 10% ほどは水素



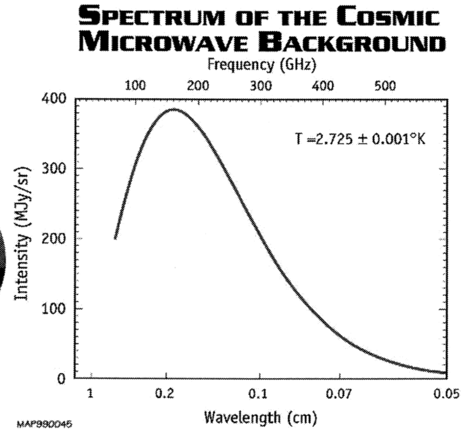


図1　宇宙マイクロ波背景放射の揺らぎ（左，出典：http://map.gsfc.nasa.gov/media/121238/index.html）とスペクトル（右，出典：http://map.gsfc.nasa.gov/media/ContentMedia/990015b.jpg）．左は初期宇宙に物質密度の揺らぎが存在したことを示しており，また右は現在の背景放射が 2.725 度の黒体輻射で極めて正確に表されることを示している．

で構成されており，それらは宇宙早期のビッグバン元素合成の際に生み出されたものである．また人体に含まれる炭素や酸素といった元素は，比較的最近（といっても数十億年ほど前だが）に星の中で高温高圧の平衡状態から非平衡過程を経て合成され，現在無事に地球上の人体に取り込まれているのである．水素原子核はその 138 億年の一生（？）のうちに，平衡から非平衡へ，そしてまた平衡状態へ，という移り変わりを何度も体験してきたはずなのだ．

誕生後 1 秒程度の初期宇宙では陽子，電子，中性子，それに電磁波とニュートリノが飛び交っており，弱い相互作用

$$\mathrm{n} + \mathrm{e}^{+} \leftrightarrow \mathrm{p} + \underline{\nu},$$

$$\mathrm{n} + \nu \leftrightarrow \mathrm{p} + \mathrm{e}^{-},$$

を通して陽子と中性子の個数密度は平衡値

$$\frac{N_{\mathrm{n}}}{N_{\mathrm{p}}} = \exp\left(\frac{-(m_{\mathrm{n}} - m_{\mathrm{p}})}{T}\right)$$

に保たれていた．ここで $m_{\mathrm{n}}, m_{\mathrm{p}}$ はそれぞれ中性子質量，陽子質量であり，その差は温度に換算して 10^{10} K ほどである．膨張宇宙では温度がどんどん低下するため，弱い相互作用の反応速度も急速に低下し，ついには上記の弱い相互作用を通した平衡を保てなくなって陽子中性子比は固定されてしまう．これは林忠四郎が 1952 年に示した，ビッグバン宇宙における極めて重要な出来事である．最終的にはこうして「残留した」中性子はほぼすべて重水素原子核，さらにはヘリウム原子核となり，現在の宇宙に存在する多量のヘリウム（質量密度にして 2 割強）はビッグバン元素合成により説明できることになる．

さて，膨張宇宙に次に起こる重要な出来事は水素原子の生成である．高温の初期宇宙では電子と陽子はばらばらの電離状態で存在していた．基底状態にある水素原子の電離エネルギーは 13.6 電子ボルトであるから，温度にすると 10 万度を超える程度に相当し，単純に考えると宇宙の温度が 10 万度を下回った頃に再結合

$$\mathrm{p} + \mathrm{e}^{-} \rightarrow \mathrm{H} + \gamma$$

が進んでもよさそうである．ところが実際には水素原子の生成は宇宙の温度が 4000 度，宇宙年齢にして 37 万年の頃にようやく起こるようになる．その理由は，背景放射に含まれるエネルギーの高い光子が逆反応 $\mathrm{H} + \gamma \rightarrow \mathrm{p} + \mathrm{e}^{-}$ を起こし，電離再結合による化学平衡により電離度が高い状態に保たれてしまうからである．宇宙膨張とともに背景放射の温度が十分下がり，このバランスが保てなくなったとき，宇宙はその進化の時間尺度に

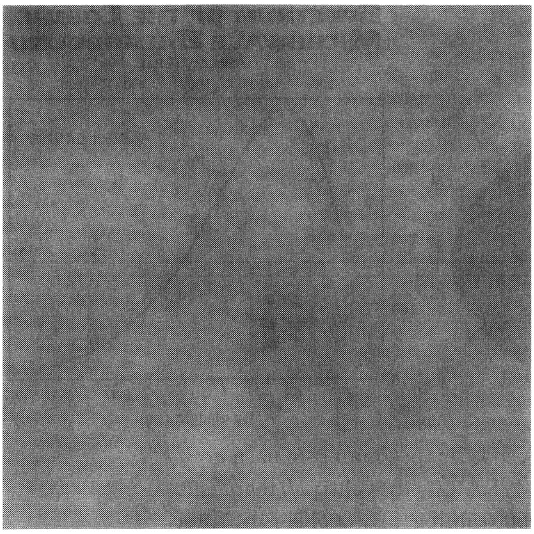
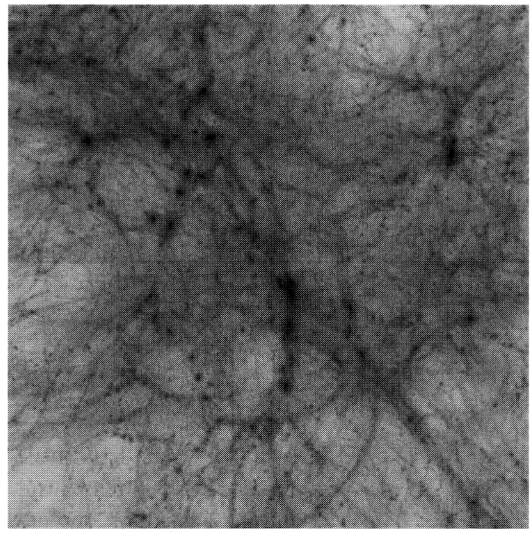



図 2　重力非線形性による宇宙の構造形成シミュレーションの例．宇宙年齢 1000 万年（左）と宇宙年齢 3 億年（右）に相当．ダークマターの分布を色の濃淡で表しており，右図の色の濃い部分に大量のダークマターが存在する．

比べればほぼ一瞬で電離状態から中性の状態となる．電子はほとんど水素原子核に取り込まれ，以降，光子をトムソン散乱するものがなくなってしまうため，この瞬間を現在のマイクロ波背景放射として観測することができる（図 1）．なお，こうして水素の再結合と宇宙の中性化はほぼ完了するが，ほんの僅か，0.01 パーセントほどの電子は陽子と結合することなく取り残されてしまい，自由電子として漂うことになる．これもまた宇宙が急激に膨張していたためであるが，後述するようにこの僅かな自由電子が後に重要な働きをする．

4.「むらむら」から星の誕生

晴れ上がりの後も宇宙は膨張を続け，背景放射の典型的エネルギーは可視光から赤外へと変化していき，宇宙は文字通り一旦闇にとざされる．この間に宇宙に漂う水素はどのような過程を経験したのだろうか．ビッグバンの後に残された，原初のわずかな密度ゆらぎは重力により成長する．初めにダークマターの塊あり——これは現在の標準宇宙モデルの枠組みで天体形成を論ずる際に必須の考え方となっている．重力の源となるのは水素ガスではなく，現在の宇宙の 23% を占める未知の物質ダークマターである．銀河や銀河団，さらには宇宙で最初に生まれた星についても同じく，その誕生にはダークマターによる重力が不可欠であった．図 2 に示すような重力不安定性による系の進化は極めて非線形性が強い．初期のわずかな密度揺らぎから複雑な網目状の構造が発展する．重力相互作用はエネルギー準位を規定しないため，エントロピー最大の状態が明確には存在せず，系が熱力学的な平衡状態に落ち着くことはない．宇宙初期では数億年という短い期間に，質量が太陽の百万倍ほどのダークマターの塊ができる（図 2 の色の濃い部分）．ダークマターの小さな塊が衝突，合体を繰り返しながらやがてより大きな物体へと成長し，その間個々の塊は力学的平衡に近い状態を保つことが知られている．

このダークマターの「器」の中で，水素とヘリウムからなる始原ガスが凝縮し，やがて星をはぐくむこととなる分子ガス雲を形成する．一般に「天体」は宇宙の中でも極めて高い密度をもつため，どのような天体もまずその材料となるガスが何らかの過程で集まることが必要になる．ある程度ガスを集めてくれば，その先はガスの自己重力により密度がどんどん高まると想像するかもしれないが，それは天体形成のほんの初期の段階にすぎな

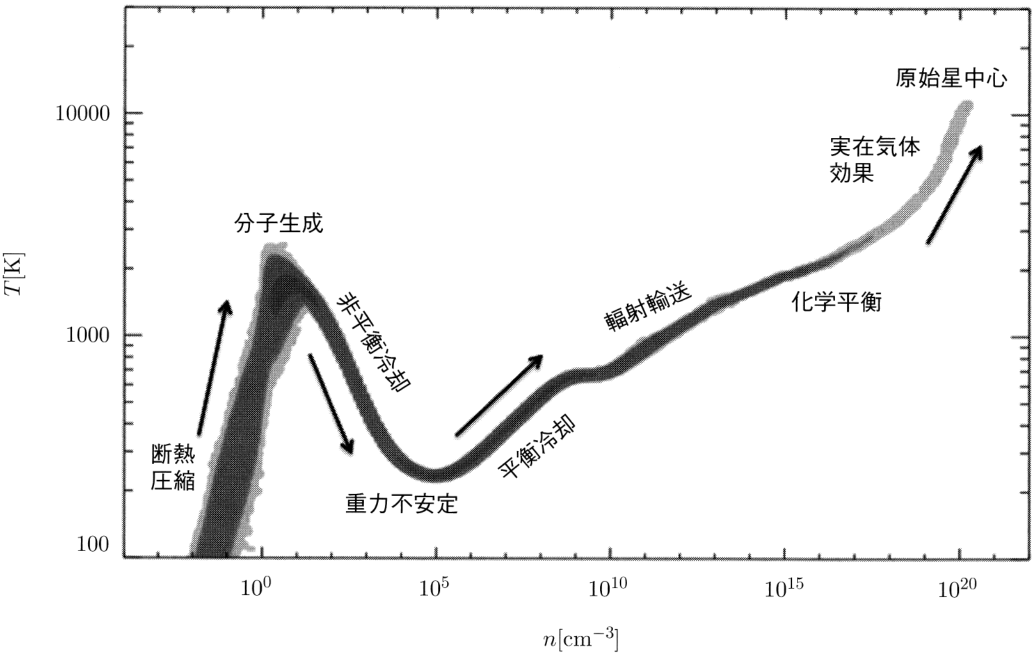


図 3 水素ガスの熱化学進化を密度（横軸）–温度（縦軸）の相図の中で示した．薄く低温の状態（左下）から，重力により収縮して原始星（右上）になるまで矢印に沿って進化する．途中，本文で説明する様々な平衡–非平衡過程が起こる．

い（図 3 参照）．ビニール袋に入れたガスを押しつぶそうとすれば分かるが，圧縮すればするほど反発力すなわち圧力が高まり，ガスの密度を上げることは容易ではない．ガスが自身の重力によって凝縮し高密度になるためにはガスの内部エネルギーを放出しなくてはならないのだ．これを可能にするのが放射冷却過程である．始原ガスが放射冷却を効率よく進めるには，まず媒体となる分子を生成しなくてはならない．重要な化学反応は，宇宙の晴れ上がりの後に始原ガス中にわずかに残された電子を媒体とする水素イオン生成反応

$$\mathrm{H} + \mathrm{e}^- \rightarrow \mathrm{H}^- + \gamma$$

と，そうして生成された水素イオンに別の水素原子がぶつかって起こる分子生成反応

$$\mathrm{H}^- + \mathrm{H} \rightarrow \mathrm{H}_2 + \mathrm{e}^-$$

である．この一連の反応の前後で電子の数は変わらないため，電子は単に触媒として働くのみであることがわかるだろう．さて，低密度のガス中にこうしてできた水素分子は周りのガスや輻射と平衡状態にあるわけではなく，ほとんどが回転も振動もしていない基底エネルギー状態にある．たまに周辺の水素原子と衝突した際に回転準位が上がり，やがて自発的に基底状態へと戻る次のような変化

$$\mathrm{H}_2 + \mathrm{H} \rightarrow \mathrm{H}_2^* + \mathrm{H} \rightarrow \mathrm{H}_2 + \mathrm{H} + \gamma$$

を通して光子を放出する．結果としてもともとガスがもっていた内部エネルギー（水素原子および分子の熱運動エネルギー）を少しだけ失うのだ．さて，上記の放射過程はガス雲の水素原子核数密度が 10000 個/cc 程度までは，分子と原子の衝突頻度でその効率が決まる．つまり典型的な非平衡冷却過程である（図 3）．もしガスが熱平衡にあり，分子のレベル準位がボルツマン統計に従っていたなら，1 分子あたりの放射冷却効率はガスの密度によらない．今考えているような薄いガスが放射冷却によって凝縮する際には，分子あたりの冷却効率がガス密度の 2 乗に比例する非平衡冷却が働く．興味深いことに，水素ガスでは非平衡冷却から平衡冷却への遷移が $n = 10^5$/cc 程度で起こり，その際のおおよそ温度が 200 度程度であることからガス雲の典型的質量——ガスの自己重力と圧力

の釣り合いから決まるジーンズ質量――が定まる．それは太陽の600倍程度であり，宇宙早期に生まれる星の質量の上限を与えると考えられる．

低温高密度になり，重力不安定になったガスはさらに暴走的に収縮していく．ガス中では化学反応，急速な3体反応による分子生成など様々な過程が起こり，最終的に高密度中心部は光学的に厚くなり，放射冷却が働かなくなる．このときガス中では，重要なほとんどの化学反応の反応時間が重力的な収縮時間に比べて短くなる．こうなると実は水素分子量および水素の電離度は以下のサハの式に従うため温度と密度の関数として定まる．

$$\frac{n_{\mathrm{H}^+}^2}{n_{\mathrm{H}}} = \frac{2}{z_{\mathrm{H}}}\left(\frac{2\pi k m_{\mathrm{e}} T}{h^2}\right)^{3/2} \exp\left(\frac{-\chi_{\mathrm{H}}}{kT}\right),$$

$$\frac{n_{\mathrm{H}_2}}{n_{\mathrm{H}}^2} = \frac{z_{\mathrm{H}_2}}{z_{\mathrm{H}}^2}\left(\frac{h^2}{\pi k m_{\mathrm{H}} T}\right)^{3/2} \exp\left(\frac{\chi_{\mathrm{H}_2}}{kT}\right).$$

ここで $\chi_{\mathrm{H}}, \chi_{\mathrm{H}_2}$ はそれぞれ水素原子の電離エネルギー，水素分子の解離エネルギー，$z_{\mathrm{H}}, z_{\mathrm{H}_2}$ は水素原子，分子の分配関数，$m_{\mathrm{e}}, m_{\mathrm{H}}$ は電子質量，水素原子の質量である．また，k はボルツマン定数，h はプランク定数である．このような化学平衡にいたるのは密度 $n = 10^{16}/\mathrm{cc}$ の頃だが，その後収縮を続けるガスがさらに高密度になってもこのサハの関係式が成り立つわけではない．単純に上式を $n = 10^{20}/\mathrm{cc}$ 程度まで適用すると，ガス中の中性度も分子率も非常に大きくなると予想される．サハの式はあくまで一つの種に対して2レベル（例えば電離状態，結合状態など）で考えうる場合にのみ厳密に成り立つものであり，$n > 10^{19}/\mathrm{cc}$ といった高密度では，水素原子中の電子はある特定の核に捕捉されているのではなく，複数の核が複数の電子に影響を及ぼし，電離ポテンシャルが1電子1核子の場合に求められた13.6電子ボルトで定まらなくなる．

ちなみに，これと似たようなことが星の中心，例えば太陽の中心でも起こっている．太陽の中心での水素の電離度を求めるためにサハの式を適用すると，多くの水素は中性の原子として存在するという誤った答えを得ることとなる．もちろん実際の太陽の中心はほぼ完全に電離状態にあり，方程式の適用範囲を把握しておかないと間違えるという一つの例である．

5. 自己重力系の熱力学と星の進化

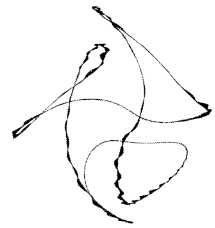
水素ガスが収縮して生まれた原始星は，すぐに周りのガスを取り込みながらさらに収縮を続け，やがて十分高温になった中心部で核融合反応が起こり，自ら安定にエネルギーを生み出す主系列星へと進化する．このような星の中心部はおおざっぱには（電離）ガスと輻射が熱平衡状態にある．ところが星は構造，すなわち密度勾配や温度勾配をもち，星中心部で生成されたエネルギーはゆっくりとではあるが常に外側に向かって流出する．最終的には星の表面から電磁波として放出され，私たちがその光を観測することとなる．

中心部の温度が何らかの原因で少し上昇すると熱が外側へ流れ出すのだが，その結果中心部は収縮して温度はむしろ上昇する．これは星のような自己重力系に特徴的な進化である．星の中心にある水素原子核にとっては，単体の核子でいるよりも鉄原子核として結合した状態にあるほうが核子あたりのエネルギーが低いため，全体としては核融合反応を通してより重い原子核になるような変化が進む．星の中心では数千万年，数億年という長い時間をかけてこの最初の段階，つまり水素からヘリウムを合成する反応が進む．もちろん太陽もその真っ最中であり，核融合がゆっくり進んでいるおかげで安定して光り輝いていると言えよう．原子核からみれば最終的に安定な鉄の核子に落ち着くという平衡状態に向かって進化していることになる．

こうして単純な元素である水素から炭素や酸素，鉄といった重元素が次々に生成され，星の進化の最終段階に起こる超新星爆発（この際には短時間で一気に重元素合成が進む）などにより宇宙空間へばらまかれる．私たちの体を構成する元素は本稿で説明したような平衡–非平衡プロセスを何度も経て，ついには人体となっていることになる．自分自身の起源を問うことは常に興味深いと思われるのではないだろうか．

（よしだ・なおき，東京大学大学院理学系研究科）

情報の統計力学



梅野　健

1. はじめに—情報の力—

なぜ大学の教員が「先生」と呼ばれ，研究所の研究員が「さん」付けで呼ばれるのだろうか？ 一見当たり前のように見えるこの世間の習慣は，確かに大学にずっといる「先生」や学生にとっては当たり前かもしれないが，情報に関する研究所で研究をし，最近，大学に異動した著者にとっては，とても不思議なことであった．この問題を情報の研究者として考えてみる．まず，顕著な違いは，大学の「先生」は個人（= 学生）の評価を含む個人情報を山のように持っているのに対し，研究所の研究員は大して個人情報を持ってないということである．すなわち，その持っている個人情報の量の違いが「先生」と「さん」付けの違いに表れるだけで，「先生」と「さん」付けされる者の研究者としての研究能力とは全く関係ないという考えである．つまり，クライアントとしての学生の個人情報をたくさん持つ大学教員の個人が「先生」と呼ばれ，せいぜい同僚の誕生日等の僅かな個人情報しか持たない研究所の研究員個人が「さん」付けで呼ばれるのは，フランシスコ=ベーコンがその昔，「知は力である」と言った如く，世間が個人情報の保持量の差という尺度で両者を「先生」と「さん」という言葉で区別しているのであろうという類推である．他の「先生」の例としては，医者の「先生」がいる．医者は患者（= クライアント）の個人情報を多数持っているが，「さん」付けで呼ばれる患者は「先生」の医者の個人情報すら持ってなく圧倒的な情報の非対称性がある．一方，このような「先生」と「さん」付けされる者の持つ情報の非対称性を是正するSNSに代表されるソーシャルメディアが普及してきていて，そこでは，「先生」も「さん」付けされる者も皆，「友達」どうしでつながっていて，「先生」と「さん」とは呼び方で区別されず，むしろリアルでは「先生」と呼ばれている者も「さん」付けで呼ばれることを好む傾向がある．そこでは「友達」どうしは，写真やメッセージもすべて「友達」の範囲で情報共有される．とすると，情報の中に，「完全公開」と「完全秘密」の中間に「適度の共有する」状態があると考えることができ，その「友達」は，ある特定の情報を共有する仲間とみることもできる．そこでは，一度「友達」となったものが，「非友達」になるのはかなり困難である．というのは，「完全秘密」または非公開の状態から「完全公開」または共有の状態へ移行することはできるが，その逆は不可能という**情報（共有）の不可逆性**を持つからである．実は，この情報共有にまつわる初めて秘密の情報を共有するプロセスというのは，情報のネットワークを形成する鍵となっているものであるが，その情報共有のプロセスが具体的にはどのような科学的な意味を持つかというのはあまりまだきちんと議論されていなかった．本小文では，この情報共有の問題を，情報の根本問題としてあえて取り上げ，統計力学およびエントロピーと関連付けて議論する．

2. すべてはアリスとボブから始まる

まず，アリスとボブという2人から始めよう．この2人が秘密情報を共有する問題を考える．離れ小島で肩を寄り添っているアリスとボブが秘密の情報を共有するには，コストが全くいらない．ただ，その情報を一緒に見るあるいは聞けば良いからである．逆に，遠く離れて住むアリスとボブが秘密の情報を共有する場合には，事情が全く異なる．彼らは，何らかの手段で通信しなければ情報を共有できない．単に情報を共有するだけであるならば，彼らがどこにいても，例えば，空港の

インターネットカフェで，インターネットにアクセスさえできれば，Web メール等で通信することで足りる．しかし，アリスとボブが情報を共有するだけではなく，他者が共有できないようにする（= 他者にとって秘密情報となる）ためには，何らかのコストが必要となる．

ここで，彼らが暗号化通信に基づいて秘密を共有することを考えてみよう．もし彼らが，最初から共通の秘密鍵を持っていれば，その秘密鍵を用いて情報を暗号化して通信すればよい．この場合，彼らの間に秘密通信（ホットライン）が確立されているので，それが確立された後は，この秘密通信を成立させている秘密鍵と暗号化方法の管理をしっかりと，つまりセキュリティを保つようにすればよいのである．では，遠く離れたアリスとボブが，秘密鍵を共有していない状況で如何にアリスとボブしか知らない秘密情報を共有できるようにすることができるのであろうか．

それ（= 初秘密情報共有問題）が可能だとすると，その初秘密情報共有にかかるコストはどう計算できるのであろうか．この秘密情報の共有プロセスを本論点の出発点として考えてみよう．

実は，この初秘密情報の共有問題は，1976 年，Diffie と Hellman によって解決された[1]．これが，現代暗号の嚆矢となる結果で，公開鍵暗号の幕開けとなる成果となる．この本質を明らかにするために，今，登場人物を，遠く離れたところにいるアリスとボブの 2 名とし，アリスとボブは，公開された情報 X にアクセスできるとしよう．ここで，X は，十分に大きな素数 N より小さく 1 より大きい整数とする．X は，公開性を持つことからここでは，公開鍵と考える．また，アリスとボブは本人しか保持しない秘密鍵 p, q を持っているとしよう．これも同じく N より小さく 1 より大きい整数であると仮定しても全く一般性を失わない．ここで，アリスとボブが秘密鍵を用いて公開鍵 X から，表 1 の変換に従って新しい情報 Y, Y' を生成するとしよう．

表 1　Diffie–Hellman プロトコルの 1 回目の情報変換（暗号化）プロセス．

	公開鍵	秘密鍵	暗号化変換
アリス	$X(1<X<N)$	$p(1<p<N)$	$Y \equiv X^p \mod N$
ボブ	$X(1<X<N)$	$q(1<q<N)$	$Y' \equiv X^q \mod N$

こうして生成された Y および Y' も，それぞれ X を秘密鍵の数だけべき乗して素数 N の剰余として与えられるので，N より小さい自然数として与えられる．この Y, Y' を与えるプロセスが，Diffie–Hellman プロトコル（以下，DH プロトコルという）の第 1 回目の暗号化プロセスである．

さて，第 2 ステップ目で，この暗号化プロセスで生成された Y, Y' をアリスとボブとが交換する．これが，情報交換プロセスであり，表 2 のようになる．

表 2　Diffie–Hellman プロトコルの情報交換プロセス．

	交換情報	秘密鍵	送付先
アリス	$Y \equiv X^p \mod N$	$p(1<p<N)$	ボブ
ボブ	$Y' \equiv X^q \mod N$	$q(1<q<N)$	アリス

ここで，アリスとボブがインターネットのような公衆回線を用いてこの Y，および Y' を送信するとしても，途中で，アリスとボブの秘密鍵 p，および q が流出，解読される心配がないことに注意する．例えば，アリスがボブに送付する情報 $Y \equiv X^p \mod N$ が途中で第三者に取得されたとしても，公開されている情報 X, N そして取得情報 Y からアリスの秘密情報 p が漏れることはない．この Y, X, N から p を求める問題は，離散対数問題という問題であり，計算量的に非常に困難な問題であることが知られているからである．

さて，DH プロトコルは，この交換した情報 Y，および Y' を基に 2 回目の暗号化プロセスを行う．ここでアリスとボブが用いる秘密鍵は，1 回目の暗号化プロセスと同じ，それぞれ p および q とし，変換方法も本質的には 1 回目の暗号化プロセスと同じであるが，暗号化変換の対象となる情報が，公開鍵 X ではなく 1 回目の暗号化プロセス後に，情報交換された情報 Y，および Y' であるところが異なる．その具体的なプロセスは表 3 のようになる．

表 3　Diffie–Hellman プロトコルの 2 回目の情報変換（暗号化）プロセス．

	受信情報＝暗号化前情報	秘密鍵	暗号化変換
アリス	$Y' \equiv X^q \mod N$	$p(1<p<N)$	$Z \equiv Y'^p \mod N$
ボブ	$Y \equiv X^p \mod N$	$q(1<q<N)$	$Z' \equiv Y^q \mod N$

さて，この 2 回目の暗号化プロセス後にアリスとボブが生成した，Z および Z' はどのような関係を持つのだろうか？ 実は，これらの 2 回の暗号化プロセスが可換（(1) 式）のため，Z と Z' は等しくなる．これがアリスとボブが初めて共有する秘密情報 Z となる．

$$
\begin{aligned}
Z &\equiv Y'^p \bmod N \equiv (X^q \bmod N)^p \bmod N \\
&\equiv (X^p \bmod N)^q \bmod N \equiv X^{pq} \bmod N \\
&\equiv Y^q \bmod N \equiv Z'. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

このDHプロトコルの鍵共有プロセスは，現代のインターネット社会の基盤となるWebのセキュリティ，特にSSL（Secure Socket Layer）プロトコルの端末とサーバー間の暗号化回線確立のための秘密鍵共有として全く普遍的に用いられているプロセスである．ここでは，このDHプロトコルの鍵共有プロセスそのものの解説ではなく，情報共有プロセスの本質を議論するための具体的な基礎現象として捉えて議論を進める．

3. そしてクリスが加わる：スケーラビリティについて

このDHプロトコルの特徴は，初めて最初の前提として秘密情報共有（= 鍵共有）を仮定せずに，秘密情報共有を可能にしたことだけではなく，その鍵共有プロセスのスケーラビリティにある．

スケーラビリティとは，以下のような概念である．まず，2人で共有できた情報を K 倍の $2 \times K$ 人が共有できるように拡張したときに，その情報共有コストが K 倍程度で抑えられる場合にそのシステム・方法がスケーラブル，またはスケーラビリティがあるという．逆にそのコストが K^2 倍や，K を指数とする指数関数 $e^{\alpha K}(\alpha > 0)$ 倍程度にまで膨れ上がる場合，そのシステム・方法がスケーラブルでない，スケーラビリティがないという．このようにスケーラビリティとは，システムおよび方法の特徴を示す概念である．

さて，この3人DHプロトコルの鍵共有プロセスのコストを暗号化，情報交換と分けて見積もってみよう．この場合，アリス，ボブ，クリスそれぞれ情報変換（暗号化計算）回数および情報交換回数が，表4の通り3回，2回となる．

表4 3人Diffie–Hellmanプロトコルのプロセスごとのコスト（1ユーザーごと）．

	暗号化プロセス	情報交換プロセス
3人ユーザー版DHプロトコル	3回	2回

では，一般の N 人で情報共有する場合はどうであろうか？ N 人の場合は，3人の場合から類推して，N 人がちょうど一筆書きの，ループとなるような情報交換をすることとなるので，情報交換は $N-1$ 回となる．そして暗号化回数は，それぞれの情報交換の前後で1回ずつ行うこととなるので，N 回となる．

表5 N 人Diffie–Hellmanプロトコルのプロセスごとのコスト（1ユーザーごと）．

	暗号化プロセス	情報交換プロセス
N 人ユーザー版DHプロトコルのユーザーごとの回数	N 回	$N-1$ 回

表5は，この N 人Diffie–Hellmanプロトコルのプロセスごとのコストをまとめたものであるが，暗号化，情報交換プロセスのそれぞれのコストが $N, N-1$ なので，このDiffie–Hellmanプロトコルが**スケーラブル**であることがわかる．必要な秘密鍵の個数もそれぞれのユーザー1名につき1個と変わらず，それは，ユーザー数が2でも1000でも100万と増えても同じであるというスケーラビリティを持つ．これが，インターネット上で多数の携帯端末含むクライアント端末から一つのサーバーにアクセスする際に，それほど，ユーザーのコストを必要とせずにこのDHプロトコルによってセキュリティを担保するSSLが普及した鍵となる．このDHプロトコルのスケーラビリティに基づくSSLがなければ，クレジットカードの番号や，Webメール，ソーシャルメディアのIDとパスワードの入力を必要とするシステムが利用できないという事態に陥り，現在のようにWebシステムが急速に普及することもなかったであろう．そのくらいに，このDHプロトコルのスケーラビリティは，一つの公開鍵 X に起因し，現在のインターネットのセキュリティの要となっているのである．ここでは，さらにアプリケーションとしてのDHプロトコルから情報の基礎的意味を考えることにする．

情報の基本的な性質を考える上では，この秘密情報の共有こそが本質であると考える．このDHプロトコルこそが，スケーラビリティを持ち，秘密情報の共有を可能にする具体的なプロセスとして捉え，以下に続く情報の基本法則を探る論考の手がかりとする．

4. ただで情報共有できるか？

ここでは，このDHプロトコルの新しい秘密情報 Z を共有するコストを考えていく．さて，今までみたと

おり，このDHプロトコルには，2つの異なるプロセスがある．一つが，暗号化プロセスであり，もう一つが情報交換（コミュニケーション）プロセスである．ここで，もし仮に，両プロセスのコストがゼロとする場合，無（= ゼロコスト）で，全く新しい情報を共有することができることになる．この帰結は，我々の直観に反するものである．何のコストもなく初めて秘密情報を共有できるとなると，熱機関のときの永久機関と同じように，ゼロコストの情報共有エンジンができることとなる．これは経験に矛盾する．この問題を考える上で，このDHプロトコルの秘密情報共有コストを，以下のように自然に分解できることに注意しよう．

DHプロトコルの情報共有コストの分解

情報共有のコスト＝暗号化変換コスト ＋コミュニケーションコスト

ここで情報共有にはコストがかかるとする経験則が正しいと認めると，暗号化コストもしくは情報交換（コミュニケーション）コスト，もしくは両方のコストがかかると考えるのが自然であろう．我々はここからスタートする．では，これらのコストはどのように計算できるのであろうか？ これらのコストに関する基本的な法則はあるのであろうか？ それに解答するためには，情報がそもそもどういう性質を持っているのかを考えていかなければならない．

5. コーヒーブレーク

ここでコーヒーブレークとする．といっても完全なブレークではない．図1はコーヒーに光を当てて浮かび上がったカーディオイド（Cardioid，心臓形）である．これが，実はこのDHプロトコルの変換と関係がある．図2は，このDHプロトコルで X（公開鍵）$= 2$ とし，素数 $N = 173$ としたときの変換を，N 等分した複素平面上の単位円上に写像した点の軌跡を描いたものである[7]．この軌跡で浮かび上がる図がまさにカーディオイドとなっている．複素平面上の単位円上で2倍角写像で写像した周期軌道となっており，この一筆書きの軌跡はまさにリアプノフ指数Log2のカオス写像の周期軌道に他ならない．3倍角の公式に相当する写像の周期軌道は，ネフロイド（Nephroid，腎臓形）となり，これもカップの形をうまく変えるとコーヒー上に再現できる．



図1　コーヒーとカーディオイド（Cardioid）—著者の研究室にて．

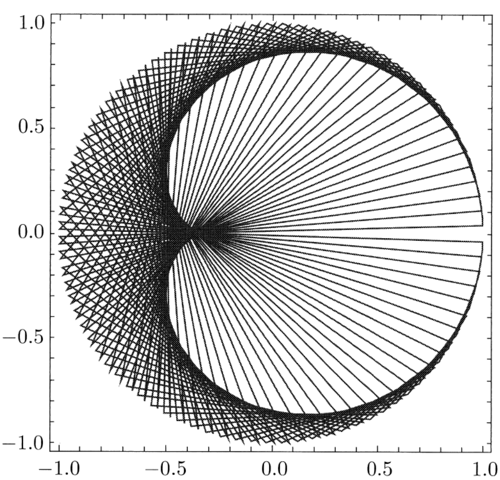


図2　カオス符号（原始根符号）の2次元平面上の軌跡（原始根 $q = 2$，素数 $= 173$）．

6. べき乗演算以外の鍵共有プロトコル

さて，DHプロトコルは，暗号化変換であるべき乗演算が可換であることが，その本質であった．他に可換な暗号化変換はあるのだろうか？ 答えはYESであり，コサインcos関数の m 倍角の公式で与えられる m 次チェビシェフ多項式 $T_m(x)$ がべき乗演算に代わる基本演算となる．

表6にあるチェビシェフ多項式の可換性[2]は，θ を m 倍してさらに n 倍したコサイン関数の値と，θ を n 倍してさらに m 倍したコサイン関数の値とが θ を mn 倍したコサイン関数に等しいことに由来する．

表 6　チェビシェフ多項式とべき乗関数.

次数 m	チェビシェフ多項式 $T_m(x)$	べき乗演算 x^m	エントロピー
1	x	x	0
2	$2x^2-1$	x^2	Log2(> 0)
3	$4x^3-3x$	x^3	Log3(> 0)
4	$8x^4-8x^2+1$	x^4	Log4(> 0)
5	$16x^5-20x^3+5x$	x^5	Log5(> 0)
6	$32x^6-48x^4+18x^2-1$	x^6	Log6(> 0)
7	$64x^7-112x^5+56x^3-7x$	x^7	Log7(> 0)

$$\boxed{\cos(mn\theta)=T_n(\cos(m\theta))=T_m(\cos(n\theta)).}$$

また，べき乗演算，チェビシェフ多項式以外の可換な多項式演算はないことが知られている．多項式の範囲を，有理式（= 多項式／多項式で与えられる関数）の範囲に拡張すると，楕円関数の加法公式に基づく演算が可換な写像を与える．ところで，Weierestrass の定理によると，可換な有理式は，本質的にこの楕円関数の加法公式によって与えられるタイプに尽きることがわかる．

これらの有理式に基づく写像はすべて，チェビシェフ多項式と同様にカオス性を持つ[3]．実は，1997 年当時著者はここで DH プロトコルの拡張を与えるチェビシェフ多項式を拡張した可解カオス写像の話がこれで尽きていると考えた[3]．ところが，話は，これで終わってなかったのである．

7. 新しい仲間—可解カオスと虚数乗法を持つ楕円関数の世界—

新しい可解カオスは，離散可積分系の分野から出てきた．

2010 年，近藤は，超幾何関数の関数等式で表される不変量を持つ差分方程式（= Sakaki–Kakei 方程式，12 種類あり以下 SK1～SK12 方程式と呼ぶ[4]）を従属変数変換を用い，自励化すると，多くの場合，著者が 1997 年に提出した可解カオス写像（次式，以下文献 5, 6) に倣い 2 パラメータの Umeno 方程式[3]と呼ぶ）となることを示した．

$$Y=\frac{4X(1-X)(1-lX)(1-mX)}{1+AX^2+BX^3+CX^4}$$

ただし，$A=-2(l+m+lm)$, $B=8lm$, $C=l^2+m^2-2lm-2l^2m-2lm^2+l^2m^2$ の適当なパラメータを代入した場合は，写像力学系に帰着できるが，SK1, SK12 の場合は，以下の未知の写像力学系の写像

$$F_2(X)=\frac{4x(1-x^3)}{1+8x^3}$$

に帰着できることを発見した[5,6]．このとき，写像 $F_2(X)$ のカオス性および可解カオス性が未知であった．その講演をたまたま聞いた著者は，後でこの可解カオス性を証明を与え，結局，Umeno 方程式で $l=e^{\frac{2\pi i}{3}}$, $m=e^{\frac{4\pi i}{3}}$ と複素数パラメータでおいた式が $F_2(X)$ であり，これは，**虚数乗法**を持つ以下の母数 $e^{\frac{\pi i}{3}}$ の楕円関数

$$\frac{\mathrm{sn}\left(\sqrt{\frac{3}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}}\cdot z, e^{\frac{\pi i}{3}}\right)}{\sqrt{3}\,e^{\frac{\pi i}{6}}+e^{-\frac{2\pi i}{3}}\mathrm{sn}\left(\sqrt{\frac{3}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}}\cdot z, e^{\frac{\pi i}{3}}\right)}$$

（但し $\mathrm{sn}(z,k)$ は母数 k の Jacobi の楕円関数）

の 2 倍角の公式で与えられることがわかった．この楕円関数を複素平面上で極とゼロ点をカウンタープロットすると図 3 のようになる．ちょうど，120 度対称性を持つことがわかる．

この 120 度対称性は，実は $l=e^{\frac{2\pi i}{3}}$ に対して，$e^{\frac{2\pi i}{3}}F_2(X)=F_2\left(xe^{\frac{2\pi i}{3}}\right)$ という**準同型性**を持つという著しい対称性を持つことがわかった．この写像は 2 倍角写像なのでリアプノフ指数が Log2 であるが，リアプノフ指数 Log3 を持つ 3 倍角写像を同じ虚数乗法を持つ楕円関数を基に考えると，

$$F_3(X)=\frac{x(1-12x^3)^2}{1+96x^3+48x^6-64x^9}$$

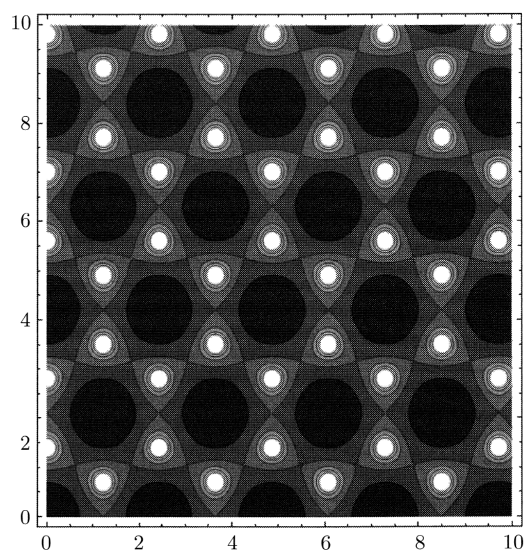


図 3　虚数乗法を持つ楕円関数の複素平面上のカウンタープロット．

となり，この場合 F_2 と F_3 との可換性だけでなく準同型性を持つという著しい特徴を持つ．この虚数乗法を持つ楕円関数は，DH プロトコルを拡張した良質な**楕円暗号**を作る源となっており，この可解カオスを作成する楕円関数を**虚数乗法**を持つ楕円関数に拡張することによって，楕円暗号と可解カオスが楕円関数の加法公式により厳密に対応することがわかってきた．また，さらに異なる可解カオス写像の間であるグローバルな関係式が成立し，それが初等整数論の平方剰余相互法則と密接に関わっていることがわかってきた[8)]．

8. 情報の不可逆性（情報学第 2 法則）とエントロピー生成

さて，思わぬところまで話が脱線したが，本題の情報の統計力学に戻ろう．まず，統計力学のエントロピー生成と不可逆性とは不可分な関係があることに注意する．

ここで**情報の不可逆性**について論じる．ここでは何らかのエントロピー生成があるのだろうか？ まずは，一度公開された情報を非公開にとすることができないという経験則からスタートする．公開するというプロセスは，万人に公開するというプロセスから，アリスとボブの 2 人に初めて公開されるという最小限の公開プロセスの両極端がある．ここでは，後者の不可逆性が成立すれば，前者の不可逆性は当然成立するということから，後者の最小限の公開プロセスを，最小単位の公開プロセスである，と考える．すなわち，DH プロトコルで扱った，アリスとボブが初めての秘密情報を共有するプロセスを最小公開プロセスと考える．前述した通り，この最小公開プロセスは不可逆である．なぜならば，DH プロトコルのようにアリスとボブが一度，情報 Z を共有した後，元の状態（情報 X のみ共有し，情報 Z を完全抹消する状態）に戻ることは不可能であるからである．言い換えると，いったん共有した情報を消去することは不可能，新しい知識を共有することは，不可逆なプロセスである，つまり情報の覆水盆に戻らずという原理と言い換えることができる．これを，熱力学第 2 法則と同じ経験則として，**情報学第 2 法則**と考えることにしよう．では，この情報の不可逆性の源は何であろうか？ ここで，DH プロトコルで扱った秘密情報共有プロセスで本質的には可解カオス写像によるカオス変換（ただし，有限状態なので，図 2 の軌道のようなある自然数長の周期を持つ周期軌道上で考える）の持つエントロピー生成に起因すると考えるのが自然であろう．ただし，可解なカオス写像のエントロピーは，コルモゴルフ＝シナイエントロピー（以下，KS エントロピー）であり，実数値をとる場合は，リアプノフ指数と等しくなる（**ペシンの等式**）ことから与えられるが，有限状態の可解カオス写像のエントロピー生成は今までとは異なる尺度が必要で自明ではない．しかし，もともとは，エントロピー生成を持つ写像であるので，その離散化によっても，Log[周期] 以下のエントロピー生成を持つことがわかる．この力学系のエントロピー生成（KS エントロピー）と，リアプノフ指数は，変分原理によって密接に関係付けられ（**ルエールの不等式**），その意味でも，情報の不可逆性の問題が統計力学の不可逆性の問題とカオス力学系を通じて深く関連する．

9. 情報の保存則（情報学第 1 法則）—公開情報と秘密情報の区別—

さて，次に情報の不可逆性を示す情報学第 2 法則から情報の保存を示す情報学第 1 法則を考えてみよう．ここで情報に関する基本法則を考えるときに，何が保存される量で，何が保存されない量かを区別することが肝要である．“情報” と一言で言っても，新聞などの公開情報はいくらでもコピーでき，それをほぼゼロコストで，例えば，Twitter 等の情報拡散装置で配布，拡散できる．この場合，公開情報は保存されず，むしろ熱力学の “熱浴” のように，公開情報は，常に拡散される性質を持つと考えられる．つまり情報の保存則を考えるときには，その対象とする情報は最初から公開情報を考えてはいけないのである．ここで熱力学の場合を考えよう．熱力学第 1 法則はエネルギー保存則である．エネルギーの形態としては，熱と仕事の 2 種類ある．ただ，そのエネルギー保存則も，熱力学の他の基本法則と違わず究極的には**現象論的な基本法則**（**＝証明することができない基本的な経験則**）であり，第 1 原理から証明できるものではないレベルの法則として存在することに注意しよう．ある法則（例：ニュートン力学）が成立する世界では，エネルギー保存則が成立することを証明できるが，このような場合，そこに何らかの仮定や限定がなされるのが本質的である．では情報保存則と言う場合に，いかなる情報が保存されるのであろうか？ まず，上述した通り公開される情報は保存されない．つまり，情報保存則が成立する必要条件として，情報の非公開性が自然に要求される．情報

の非公開性というのは，考えられるのは，外とコミュニケーションできない閉じた系での情報や，暗号化された情報である．これを一つ一つ吟味していこう．

まず，系が閉じている故に非公開性が保証される閉じた系の情報であるが，これは，当たり前に保存される．次に何らかの手段で暗号化された情報，もしくは暗号化された信号を考えよう．まず，暗号化された情報は復号化されなければ情報として意味をなさないので，まず公開情報のようにいくらでもコピーができる，拡散できるという情報ではない．有限の数の者が解読用の秘密鍵を持ち解読できることを考えると，暗号化された情報は保存されると考えることができる．あるいは，共通の暗号化復号化プロトコルの鍵の保有によって閉じた系（CUG: Closed User Group）を構成し，その閉じた系 CUG の中で情報が保存されることを考えよう．その場合も，その CUG 以外に“情報”が拡散しないという性質から暗号化された情報のみ，情報保存則の対象となると言えよう．が，情報保存則の本質は，この暗号化された情報だけにあるのではない．熱力学の熱に相当する情報がなければ，情報保存則の対象とする情報は閉じた系の情報か，非公開情報（秘密鍵情報）が保存されるという当たり前の内容で終わってしまう．ここでは，さらに，熱力学で熱に相当する，保存対象となる情報に関わる量があるとしよう．つまり，以下の通り考えるのである．

> 情報保存則の対象となる保存量
> 　＝ 非公開（秘密）情報 ＋ “未知の情報量”．

では，この未知の情報量とは何か？ この量は，公開された情報でも非公開の情報でもなく，今まで情報と捉えられていなかった量である．その意味でここでは，未知の情報量と呼んだ．ここでは熱力学で熱に相当する未知の情報量が，情報でエントロピーを生成するカオスと考えると上述の保存則（＝ 情報学第 1 法則）から考えられる．この保存則の実態は何であろうか？ これを著者は，**カオス通信システム**（＝ **広義の暗号通信システム**）[9] と考える．カオス通信システムというのは，情報→カオス→情報→…というカオス変調を通して情報を伝送するシステム一般のことであり，実態として，送信時で情報となり，伝送時に変調によりカオス信号となり，受信時では元の情報を受けるが，それぞれのフェーズで持つ情報量は変わらないという通信システムというわけである．最近の研究によると，フェーディング等電波の反射がある状況等の実環境下で，このカオスに基づく変調は，大変性能が高いことがわかってきた．このプロセスでは，変調（スペクトル拡散変調）によっていったん，カオス信号の場合，情報をノイズのように暗号化して扱うが，復調側で鍵を持っていればカオス信号を再現でき復号化できるので，秘密情報は保存されるのである．以上が，情報の保存則（情報学第 1 法則）が成立するとどのようなものになるかの考察である．

これらの情報の 2 つの基本法則すべてが，カオス力学系（可解カオス）を通じて統計力学のエントロピー生成と深く関わる．その具体例が現在の SNS 等の Web システムで自然に用いられている DH プロトコルが実現する**秘密情報の共有**と**カオス通信システム**となる．この小文により，ようやくきちんと考えられるようになった情報の基本的概念が，現代的アプリケーションと深く関わり，また，楕円関数論の数理と統計力学の基本概念であるエントロピー生成とも深く関わる面白さが読者に伝わるならば，著者の望外の喜びである．

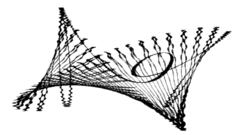
参考文献

1) W. Diffie and M.E. Hellman, “New Directions in Cryptography”, *IEEE Trans. on Information Theory*, **vol.IT-22**, No.6 (1976), pp.644–654.
2) R.L. Adler and T.J. Rivlin, “Ergodic and mixing properties of Chebyshev polynomials”, *Proc. Amer. Math. Soc.* **15** (1964), pp.794–796.
3) K. Umeno, “Method of constructing exactly solvable chaos”, *Phys. Rev. E*, **vol.55** (1997), pp.5280–5284.
4) 榊武史，筧三郎，“超幾何関数で表される不変量を持つ差分方程式”，日本応用数理学会論文誌，**vol.17** (2007), pp.455–462.
5) 近藤弘一，“非自励な保存量を持つ Sakaki-Kakei 方程式について”，日本応用数理学会 2010 年度年会講演予稿集 (2010), pp.169–170.
6) K. Kondo, “Solutions of Sakaki-Kakei equations of type 3, 5, and 6”, *JSIAM Letters*, **vol.2** (2010), pp.73–76.
7) K. Umeno and A-H. Sato, “Chaotic methods for q-Gaussian random variables”, to appear in *IEEE Trans. on Information Theory* (2013).
8) 梅野健，“カオスと平方剰余の相互法則”，日本応用数理学会 2012 年度年会講演予稿集 (2012), pp.377–378.
9) 梅野健，“カオス通信と統計力学” 京都大学基礎物理学研究所物性研究講義ノート (2002) http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~busseied/lecture_note/umeno.pdf

（うめの・けん，京都大学大学院情報学研究科）

統計力学の教育

学生からの質問



西森　秀稔

東工大で二十数年にわたって物理学科の学生に統計力学を教えてきた．授業中に質問をするように促してもなかなか手を挙げないので，紙に質問や感想を書かせて，次回の授業時にすべての質問に回答を書いて配布したり口頭で説明したりしている．紙に書かせると，思いもよらぬ鋭い質問や意外なコメントなどが出てきてなかなか面白い．いくつかを紹介して，学生の理解の仕方や気質を見ていただこう．太字の部分がほぼ原文のままの質問である．

Q. **球の体積を求める公式において，$\Gamma(n/2)$ といったガンマ関数の式が何を意味しているのか分かりませんでした．ガンマ関数の物理的意味を説明して下さい．**
式をいじるだけでなく物理的意味を考えるように繰り返し言うようにしているが，すべての数式に物理的意味があると考えてしまう学生もいるようである．なかなか手綱さばきが難しい．

Q. **絶対零度では運動が止まっているということと不確定性原理は両立しているのですか．**
量子力学と統計力学を同時並行で教えているので，古典力学に適用限界があるということがまだ十分分かっておらず，混乱が見られることがある．

Q. **周期的境界条件は数学的なテクニックに過ぎないのですか，それとも物理的に意味づけできるのですか．数学的なテクニックにしか見えないのですが，それによってエネルギーの離散性などの物理的に重要な意味を持つ結果が導かれるのがどうも納得できません．**
研究者としてすっかり使い慣れていると，周期的境界条件の物理的意味などと聞かれるとついぎょっとしてしまうが，初心者には確かに奇妙に見えるのだろう．

Q. **統計力学は，最初からエネルギーの離散性を使って量子力学に基づいて理論が構成されていますが，量子論以前に古典物理学に基づいて統計力学が出来ていたと聞きました．エネルギーを連続量として理解が進んでいたのでしょうか．**
理論体系をすっきりさせるため，状態を一つ二つと数えられる量子力学に基づいて統計力学を導入しているが，このような質問もときどき出てくる．一通り全体像を提示したあとで，古典極限を取ると古典統計力学が出てくる話をするとようやく少しすっきりするようである．

Q. **統計力学では，温度は平衡状態でなくても定義されているのでしょうか．熱力学では，熱平衡状態においてのみ定義されていたと思うのですが．**
鋭い質問である．局所平衡などと言い訳をしながら答えるのだが，どれだけ伝わっているのか不安が残る．

Q.「系」の概念がよく分かりません.

多数の要素が非自明に絡まるマクロな系の性質を系統的に学ぶのは初めてなので，系といった基本的な概念がすぐには飲み込めないようである．研究者としては普段あまり考えずに使っている言葉を，厳密に定義してくれと学生に言われるとうろたえる．

Q. カノニカルという名前の由来は何ですか.

定番の質問である．しかし，これを説明している教科書は実は少数派である．

Q. 分配関数の物理的意味が分かりません.

「対数を取ると自由エネルギーになる.」と説明しても，「分配関数自体には意味がないのですか.」と食い下がってきたり，「自由エネルギーは分配関数の対数に $-k_BT$ を掛けたものではないのですか.」といい加減さを突いてきたりする．学生恐るべし．

Q. 準静的というのはどの程度ゆっくりなのですか．気体の分子の運動に比べると，ピストンを動かす速さは極めて小さなものに思えるが，それでも準静的とわざわざ断る必要があるのですか.

考え出すとなかなか難しい．「非平衡から平衡への緩和時間に比べて…」などと言い出さずに何とか平易に説明しようと試みるが，学生は飲み込めないという顔をしている．

時たま英語で質問を書くように言うと，いろいろな英文を書いてくる．以下の質問文は，文法ミスも含めて学生が書いたものそのままである．

Q. I don't understand the usage and mean of order. For example my statistical mechanics text say that the next sentence ignores one order's quantity.

大きさのオーダーの概念も，初学者がなかなか飲み込めない事柄の一つのようである．

Q. Today I know the way that we know star's temperature. So, using this way, can I know the temperature of matter around me? For example, fire.

黒体輻射を説明して，星の温度がスペクトルを見ると分かるという話をしたときの質問である．その場で手を上げて聞いてほしいといつも思う．

Q. Is there an expression that defines a 'good' physics quantity (including thermodynamics and statistical mechanics)?

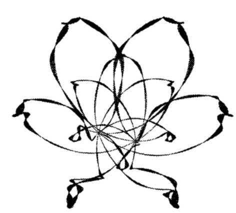
思わぬ質問である．善悪の価値判断はしないというのが研究者としての了解なのだろうが，本当にそれでよいのだろうかと考えてしまう．

東工大の理学部物理学科では，2年生後期から3年生前期にかけて統計力学の講義科目が設定されている．予備知識が限られているので，初歩的なことから一つ一つ積み上げ，ほとんどすべての計算をやって見せながら丁寧に説明していくことが，「そうか，分かった！」という気にならせる条件だと感じている．研究者としては当然すぎて無意識のうちに前提としている事柄も，初学者にはなかなかぴんとこないことが多々ある．そのいくつかの例が，上の質問に現れている．

統計力学は量子力学や相対論などと違って，学生が授業が開始される前から強い興味を持って，学ぶのを楽しみにしている場合は比較的稀である．すでに高校や大学初学年で熱力学を学んだ経験から，どちらかというと苦手意識に近い先入観を抱いて授業に臨んでくる者が多いように見受けられる．ミクロとマクロを結ぶ斬新な視点を提供することを強調し，量子力学を基盤とする明確な論理性とそれから導かれる驚くべき事柄の数々を「いかにも面白そうに」話していくと，学生は次第に身を乗り出して聞くようになる．半年くらいで黒体輻射の理論をやって，宇宙の始まりについての重要な手がかりが得られるという話までたどり着くと，相当数の学生が統計力学に対する意識をすっかり改めるのを目にする経験を何度もしてきた．教育の醍醐味である．

（にしもり・ひでとし，東京工業大学大学院理工学研究科）

統計力学と関数論とブラウン運動と



香取　眞理

■　1. 揺らぎを厳密に表現するための研究　■

大学の物理学科に入学あるいは進学すると，まずは高校でも習った力学と電磁気学を勉強し直す．その後，**量子力学**と**統計力学**の講義を受けることになる．この２つを比較すると，習い始めたとき，量子力学のほうが断然興味深く思えるのではないだろうか．ハイゼンベルクの不確定性原理だとか，シュレーディンガーの猫だとか，用語が魅力的だし，なんといっても「高校で習ったニュートン力学は実は正しい理論ではなく，量子力学の近似に過ぎない」というような言い回しは挑発的である．もちろん，統計力学は熱力学や流体力学といったマクロで連続的な現象と原子や分子といったミクロで離散的な実体とを結びつける画期的な理論である．習いたてのときにその価値が分からないのは，単に力学や電磁気学に比べて熱力学や流体力学を高校で教わっていないために過ぎない．

しかし，量子力学のほうにより惹かれる理由は別にもあるように思う．量子力学の基本方程式であるシュレーディンガー方程式はニュートンの運動方程式よりも難しい．例えば，１次元調和振動子を考えた場合，ニュートン力学なら答えは高校の数学でも習った三角関数で表せる．しかし，量子力学ではエルミート関数という**特殊関数**が必要で，普通これは大学に入って初めて知ることになる．「量子力学という新しい物理を記述するには，特殊関数論という特別な数学をマスターしなければならない」と，これまた挑発的なことを先生はおっしゃる．とかく若いときには，難しいことに挑戦したがるものである．

特殊関数論は**関数論**の一部である．私は数学科でどのように講義がなされているか良く知らないが，関数論には一般論と特論とがあり，特殊関数は後者の分類に入っているのであろう．物理数学の講義では，関数論の一般論として**複素関数**の話をする．解析性とコーシー・リーマン条件，実部関数と虚部関数の調和性，共形変換など話題に事欠かないし，留数定理を使った積分計算には楽しい演習問題が多い．しかし，これもまた統計力学に対する量子力学の優位性に加担する．波動関数は複素関数であるからである．他方，統計力学の確率分布は実関数であり，その計算は実解析である確率論をベースにする．

しかし，一たび統計力学を勉強し，卒研や大学院で研究生活を始めるようになると，上述のような最初の印象は単なる思い違いであったことを知ることになる．2 次元イジング模型のオンサーガー解に代表される統計力学模型の厳密解の研究は，複素関数論，特に楕円関数論の研究といってもよい．量子力学は相対論の要請に基づき量子場の理論となるわけだが，そこで議論される実体は，統計力学的な物理量（分配関数や相関関数）と同一視される．

量子力学（量子場の理論）も統計力学も，結局のところは等しく，**揺らぎ**を表現し制御しようと

するための学問なのだと思う．量子力学では，揺らぎは不確定性に由来する根源的なものであり，しばしば代数の非可換性をもって表現される．一方，膨大な数の粒子を取り扱おうとする統計力学では，粗視化操作の過程で副次的と見なされた自由度を表すものとして揺らぎが導入され，もっぱら確率変数として表現される．同じく揺らぎを対象にしているのにもかかわらず，理論構成が著しく異なっており，これが冒頭に述べたような初学者の誤解を生むのであろう．別の言い方をすれば，「揺らぎ」というものは深いものに通じる何かなのである．

数理物理の分野では，この 10 年ほどの間に，揺らぎを厳密に表現する試みが著しい進歩を遂げている．そこにおいては，量子場の理論（共形場理論）と統計力学（確率論）とともに，関数論が重要な役割を果たしている．本稿ではその様子を，ある一つの「もの」を中心にして解説を試みる．その「もの」とは**ブラウン運動**である．

■ 2. ブラウン運動を用いた空間次元の連続化 ■

1 次元標準ブラウン運動を B_t と書くことにする．これは，直線（1 次元実空間 $\mathbb{R}$）上をランダムに運動する「ブラウン粒子」の時刻 $t \geq 0$ での位置を表す確率変数である．まず，$t=0$ での初期位置を与える：$B_0 = x \in \mathbb{R}$．2 時刻 $0<s<t$ に対して，時間間隔 $t-s$ におけるブラウン粒子の変位は $B_t - B_s$ ということになるが，この分布は時刻 s 以前の運動と独立であり，任意の $a<b$ に対して

$$\mathbf{P}\Big(B_t - B_s \in [a,b]\Big) = \int_a^b p_{t-s}(x)dx,$$
$$p_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/2t} \tag{1}$$

で与えられる．$p_t(x)$ は平均零，分散 $\sigma^2 = t$ のガウス分布の確率密度であるが，ここでは時間 t の間の幅 x の推移の確率密度を指定することから，**推移確率密度**とよぶ．ブラウン運動 B_t は，上記の性質をもち，かつ，確率 1 で時刻 t の連続関数であるものとして定義される．

さて，$D=2,3,4,\dots$ として D 個の独立なブラウン運動を用意して，それらを $B_t^1, B_t^2, \dots, B_t^D$ と書くことにする．D 次元ブラウン運動は，$\boldsymbol{B}_t = (B_t^1, B_t^2, \dots, B_t^D)$, $t \geq 0$ で定義される．これが，D 次元実空間の中をランダムに浮遊するブラウン粒子の時刻 t での位置ベクトルを与えるというわけである．初期位置を $\boldsymbol{B}_0 = \boldsymbol{x} = (x^1, x^2, \dots, x^D) \in \mathbb{R}^D$ とすると，これは原点から距離 $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{(x^1)^2 + \cdots + (x^D)^2}$ のところにある．それでは，時刻 $t>0$ でのブラウン粒子は原点からどれだけ離れた点にいるのだろうか．これは，$\boldsymbol{B}_t$ の動径成分として定義される

$$X_t = |\boldsymbol{B}_t| = \sqrt{(B_t^1)^2 + \cdots + (B_t^D)^2} \tag{2}$$

という確率過程の挙動を調べる問題である．

伊藤の公式[1]によって計算すると，X_t の従う**確率微分方程式**は

$$dX_t = dB_t + \frac{D-1}{2}\frac{1}{X_t}dt, \quad t \geq 0 \tag{3}$$

であることが導かれる．ここで，右辺第 1 項の B_t は，上の $B_t^j, 1 \leq j \leq D$ とは独立な 1 次元標準ブラウン運動である．この X_t が時間 $t>0$ の間に $x \geq 0$ から $y \geq 0$ に変化する推移確率密度を $p_t^D(y|x)$ と書くことにすると，これは偏微分方程式

$$\frac{\partial p_t^D(y|x)}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p_t^D(y|x)}{\partial x^2} + \frac{D-1}{2}\frac{1}{x}\frac{\partial p_t^D(y|x)}{\partial x} \tag{4}$$

の初期条件 $p_0^D(y|x) = \delta(y-x)$ の下での解で与えられる．(3) 式から (4) 式への移行は見て明らかであろう．ブラウン運動の項 dB_t が 2 階微分の拡散項に，dt に比例した有界変動項は勾配 $\partial/\partial x$ に比例したドリフト項になっている[1]．この解は，**変形ベッセル関数**

$$I_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2n+\nu}}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1+\nu)} \tag{5}$$

を用いて（$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-u}u^{z-1}du$ はガンマ関数），

$$p_t^D(y|x) = \frac{y^{\nu+1}}{x^\nu}\frac{e^{-(x^2+y^2)/2t}}{t} I_\nu\left(\frac{xy}{t}\right) \tag{6}$$

で与えられる．ただし，助変数 ν は

$$\nu = \frac{D-2}{2} \tag{7}$$

とおく．ここで $I_\nu(z)$ という特殊関数が登場したわけであるが，一つ関数論的な知識を使うことにする．それは $I_\nu(z)$ は助変数 ν に関して解析的であるということである．つまり，(6) 式で与えられた $p_t^D(y|x)$ は任意の複素数 $\nu \in \mathbb{C}$ に対して意味を持つ．ここに，(7) 式を D について解いて

$$D = 2(\nu+1) \tag{8}$$

として，本来は $D = 1, 2, 3, \ldots$ と離散的だった次元 D を（複素）連続変数に拡張して考えるというアイデアが生まれる．本稿では，次元は実数であるとして，特に $D \geq 1$，すなわち $\nu \geq -1/2$ の場合を考えることにする．そして，(6) 式を推移確率密度とする 1 次元確率過程 X_t を D **次元ベッセル過程**とよぶ．空間次元 D を 1 以上の実数に拡張し，その空間でのブラウン粒子の原点からの距離が X_t で与えられるものと考えるのである（$D=1$ のときは，元の 1 次元ブラウン運動 B_t ではなく，$X_t = |B_t|$ である．「1 次元ベクトル」$x \in \mathbb{R}$ の「動径成分」はその絶対値 $|x| \geq 0$ で与えるので良いだろう）．

原点から距離 x の点からスタートした D 次元ブラウン運動が初めて原点に到達する時刻を T_x と書くことにすると，これは x からスタートした D 次元ベッセル過程 X_t^x を用いて $T_x = \inf\{t > 0 : X_t^x = 0\}$ で与えられる．任意の $x > 0$ に対して，$D \geq 2$ のとき $T_x = \infty$ であり，$D < 2$ のとき $T_x < \infty$ であることが証明できる．これを $D > 2$ のときは推移的であり，$D < 2$ のときは再帰的であるという．$D = 2$ のときは $T_x = \infty$ であるが，$\inf_{t>0} X_t^x = 0$ であり，原点の任意の近傍に戻ってくる（だから，酔歩の私も自宅にたどり着くことができるのだろう）．このことは，ブラウン運動の軌跡 $B_{[0,\infty)}$ のフラクタル次元が 2 であることに依るので，容器であるところの空間次元 D を連続にしても話は変わらない．

一般に次元 D が低くなって 1 に近くなるほど，ブラウン運動は原点に戻りやすくなる．(3) 式（あるいは (4) 式）の第 2 項の因子 $1/X_t$（因子 $1/x$）は $X_t \to 0$ ($x \to 0$) で正に発散するものであり原点からの斥力効果を表しているのだが，その係数が $(D-1)/2$ だからである．その傾向は，上述のように $D_{\mathrm{c}} = 2$ で定性的に変化するのであるが，実はもう一つ臨界的な次元がある．それは $D_{\mathrm{c}}^* = 3/2$ 次元である[2)]．

$0 < x < y$ として，x からスタートした D 次元ベッセル過程 X_t^x と y からスタートした X_t^y の挙動を比較する．ただし，ともに全く同じブラウン運動 B_t で駆動させた確率微分方程式 (3) でプロセスを生成させることにする．次元が十分に低くて $1 \leq D \leq D_{\mathrm{c}}^*$ のときには，原点近くからスタートした粒子ほど原点に早く戻ってくる．つまり，確率 1 で $T_x < T_y$ が成り立つ．しかし，次元が $D_{\mathrm{c}}^* < D < 2$ だと，X_t^x は再帰的ではあるが，原点に戻ってこようとする傾向が弱いため，最後にもたついてしまう．その結果，遠くからスタートした X_t^y と同着になってしまうことがあり得るのである．つまり，確率 $\mathbf{P}(T_x = T_y) > 0$ なのである（設定から $T_x > T_y$ はあり得ない）．強調すべきことは，この確率が**ガウスの超幾何級数**

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{z^n}{n!} \tag{9}$$

（ただし，$(c)_n = c(c+1)\cdots(c+n-1)$）を使って書けるということである[2)]：

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(T_x = T_y) &= 1 - \frac{\Gamma(D-1)}{\Gamma(2(D-1))\Gamma(2-D)} \\ &\times F\left(2D-3, D-1, 2(D-1); \frac{y-x}{y}\right) \\ &\times \left(\frac{y-x}{y}\right)^{2D-3}, \quad D_{\mathrm{c}}^* < D < D_{\mathrm{c}} \end{aligned} \tag{10}$$

「1.5 次元以上 2 次元未満の中途半端な次元の空間の中を運動するブラウン粒子が原点近くでどれだけもたつくのか」という微妙な揺らぎの振舞いが特殊関数で正確に表せた．このことは，この揺らぎが実体をもつことを示唆する．実際，次節で述べるシュラム・レヴナー発展の理論において，

(10) 式は 2 次元パーコレーション模型で重要な物理量を与えるカーディーの公式（の拡張）と等価であることが明らかになるのである[2)].

3. 複素化がもたらす揺らぎの統一理論（SLE）

前節の後半で X_t^x という記法を用いた．これは，初期時刻 $t=0$ で初期値 $x>0$ からスタートした D 次元ベッセル過程の時刻 t での値を表す．(1) 式，すなわちブラウン運動 B_t の推移確率密度が分散 t のガウス分布関数であることから，時間 t の間のブラウン粒子の移動距離は $\sqrt{t}$ に比例することが分かる．時間 t に対して空間的な広がりが $\sqrt{t}$ である現象を一般に**拡散現象**という．ブラウン運動は典型的な拡散過程であり，$\kappa>0$ としたとき，その定義から $B_{\kappa t}$ の分布（つまり，時刻 t をその κ 倍の時刻 κt に**時間変更**したときの空間的な拡がりの分布）は，B_t の $\sqrt{\kappa}$ 倍（つまり $\sqrt{\kappa}B_t$）の分布に等しいことになる．これを**ブラウン運動スケーリング**という．$p_t(x)$ が偶関数であることから，$-B_t$ の分布と B_t の分布は等しいことも明らかである．以上の考察から，$\widehat{X}_t^x \equiv \sqrt{\kappa}X_t^x + B_{\kappa t}$ として，特に

$$\kappa = \frac{4}{D-1} \tag{11}$$

とおくと，D 次元ベッセル過程の確率微分方程式 (3) は，確率過程 $B_{\kappa t}$ を含む常微分方程式

$$\frac{d\widehat{X}_t^x}{dt} = \frac{2}{\widehat{X}_t^x - B_{\kappa t}} \tag{12}$$

に変換されることが分かる．

さてここで，$i=\sqrt{-1}$ として，$x \to z = x+iy$, $\widehat{X}_t^x \to g_t(z) = \widehat{X}_t^x + i\widehat{Y}_t^x$ というように，変数の**複素化**を行うことにする．ただし，ブラウン運動はそのまま（実数のまま）に据え置く．すると，

$$\frac{dg_t(z)}{dt} = \frac{2}{g_t(z) - U_t} \tag{13}$$

という形の方程式が得られる．ただし，$U_t = B_{\kappa t}$ である．

複素上半面を $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z > 0\}$ と書く．$z \in \mathbb{H}$ として，(13) 式の時刻 t での解 $g_t(z)$ が存在すると仮定する．すると，ブラウン運動を実数に据え置いたことから，必ず $g_t(z) \in \mathbb{H}$ であることになる．複素化ベッセル過程としては，z は初期値であり，その各値に対して時刻 t での値を与えるものとして $g_t(z)$ を考えるのが自然である．しかし，ここでは一歩進めて，g_t を $\mathbb{H}$ 内の単連結部分領域 $H_t \subset \mathbb{H}$ から $\mathbb{H}$ への写像と見なすことにする（H_t は時刻 t で解 $g_t(z)$ が存在するような z 全体の集合）．複素関数論の単葉関数に対するレヴナーの理論によると，方程式 (13) の形から，解 g_t は**共形写像**であることが分かる．駆動関数として実関数 $\{U_t : t \geq 0\}$ が与えられると，$g_0(z) = z \in \mathbb{H}$ という初期条件の下で (13) 式を解くことにより，共形写像の時間発展系 $\{g_t(z) : t \geq 0\}$ が得られるのである．(13) 式を**レヴナー方程式**という．

我々がベッセル過程を複素化することによって得たレヴナー方程式では，駆動関数はブラウン運動の時間変更 ($t \to \kappa t$) $U_t = B_{\kappa t}$ である．この**揺らぎを伴ったレヴナー方程式**は，2000 年にシュラムによって初めて議論された[3)]．今日では，$U_t = B_{\kappa t}$ の下での方程式 (13)，およびその解として得られる共形写像のランダムな時間発展系は**シュラム・レヴナー発展**（Schramm-Loewner evolution），略して **SLE** とよばれている[4,5)].

SLE (13) の定義域は H_t の境界まで拡張できる．H_t の境界は g_t によって $\mathbb{H}$ の境界である実軸 $\mathbb{R}$ に写される．g_t は 1 対 1 写像であり，$B_{\kappa t} \in \mathbb{R}$ なので，

$$\gamma_t = g_t^{-1}(B_{\kappa t}), \quad t \geq 0 \tag{14}$$

が定義される．γ_t が $\mathbb{H}$ 上に確率 1 で連続曲線を描くことが証明できる．駆動関数であるブラウン運動の時間変更パラメータ κ を指定したときの曲線 $\gamma_{[0,\infty)}$ を SLE_κ 曲線とよび，その確率測度を $\mathbb{P}_\kappa$ と書くことにする．**共形不変性**と**領域マルコフ性**という 2 つの性質をもつ $\mathbb{H}$ 上の連続曲線の測度は一般に $\mathbb{P}_\kappa, \kappa > 0$ で与えられることが証明された[2)]．ヴェルナーは（シュラムとローラーと

共に行った）この業績が高く評価され，2006 年に数学のノーベル賞とも称されるフィールズ賞を受賞した．

(11) 式によって，$D_c = 2$ と $D_c^* = 3/2$ に対応して κ の 2 つの臨界値が $\kappa_c = 4, \kappa_c^* = 8$ と定まる．$0 < \kappa \le \kappa_c$ のとき SLE_κ は単純曲線であり，**フラクタル物理**で研究されてきた平面格子上のランダムな経路の連続極限を記述する．実際，ループ除去ランダムウォーク（loop-erased random walk）の連続極限は $\mathbb{P}_{\kappa=2}$ であることは証明され，自己回避ウォーク（self-avoiding walk）の連続極限は $\mathbb{P}_{\kappa=8/3}$ であることが予想されている．$\kappa_c < \kappa < \kappa_c^*$ のとき SLE_κ 曲線は自分自身と接して $\mathbb{H}$ 上にループを織りなす複雑なものとなる．これらは 2 次相転移を起こす平面上の熱平衡統計力学模型に現れるランダム曲線が，**臨界点（相転移点）**において従う確率法則を実現する．スミルノフは臨界パーコレーション探索過程の連続極限の測度が $\mathbb{P}_{\kappa=6}$ であり，（フォーチュン・カステライン的）臨界イジング界面の連続極限の測度が $\mathbb{P}_{\kappa=16/3}$ であることを証明し，2010 年にフィールズ賞を受賞した．$\kappa \ge 8$ のとき SLE_κ 曲線は稠密となり $\mathbb{H}$ を埋め尽くす．特に $\mathbb{P}_{\kappa=8}$ は砂山崩し模型や森林火災模型といった**自己組織化臨界現象**[6] の模型で研究されている一様全域木（uniform spanning tree）ペアノ曲線の連続極限測度を与える．

シュラムが見出した SLE は，フラクタル，相転移，自己組織化臨界現象といった統計力学の研究分野における分類を超えた，いわば，平面上の連続曲線の（臨界的な）揺らぎの統一理論といえる[*1]．SLE (13) を駆動している $U_t = B_{\kappa t}$ をたった 1 つのブラウン運動（の時間変更）と見るべきなのか，それとも $D = 4/\kappa + 1$ 次元のブラウン運動と見るべきなのだろうか．**境界共形場理論**との対比より，SLE のパラメータ κ とセントラル・チャージ（中心元）c とは

$$c = \frac{(3\kappa - 8)(6 - \kappa)}{2\kappa} \qquad (15)$$

で結ばれることが分かる[4,5]．ビラソロ代数は $D = (25 - c \pm \sqrt{c^2 - 26c + 25})/12$ 次元のブラウン運動の揺らぎを表現しているということか．

■ 4. ランダム行列理論が示す多変数化の道 ■

D 次元ブラウン運動 $\boldsymbol{B}_t$ は，$D = 2, 3, 4, \ldots$ のときには，「D 次元ベクトル値ブラウン運動」であるということができる．その拡張として，「行列値ブラウン運動」M_t を考えたくなる．特に $N \times N$ のエルミート行列に値をとる場合を考えることにすると，それには N^2 個の独立な 1 次元ブラウン運動を用意すればよい．行列値の乱数の統計理論を**ランダム行列理論**という．我々はその確率過程バージョンを研究している[7,8]．

ベクトル値ブラウン運動 $\boldsymbol{B}_t$ の動径成分 $|\boldsymbol{B}_t|$ がベッセル過程であった．$N \times N$ エルミート行列値ブラウン運動 M_t の動径成分に相当する量は N 個の実固有値 $\boldsymbol{\Lambda}_t = (\Lambda_t^1, \Lambda_t^2, \ldots, \Lambda_t^N)$ である．この固有値確率過程 $\boldsymbol{\Lambda}_t$ は**ダイソン模型**とよばれている．配置空間は A 型ワイル領域 $\mathbb{W}_N = \{\boldsymbol{x} = (x^1, x^2, \ldots, x^N) : x^1 < x^2 < \cdots < x^N\}$ であり，配置 $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{W}_N$ から配置 $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{W}_N$ への時間 t の間の推移確率密度は

$$p_t^N(\boldsymbol{\lambda}|\boldsymbol{\mu}) = \frac{h(\boldsymbol{\lambda})}{h(\boldsymbol{\mu})} \det_{1 \le j,k \le N} \left[p_t(\lambda^j - \mu^k) \right] \qquad (16)$$

で与えられる．ただし，

$$h(\boldsymbol{x}) = \prod_{1 \le j < k \le N} (x^k - x^j) \qquad (17)$$

であり，p_t は (1) 式で与えたものである．

N 変数 $\Lambda_t^1 = \lambda^1, \cdots, \Lambda_t^N = \lambda^N$ を 1 次元上の N 粒子の位置と見なすことにする．$N = 2$ とすれば 2 粒子系となり，(16) 式は配置 (μ^1, μ^2) から配置 (λ^1, λ^2) への推移確率密度を表す．そこで，2 粒子系に対する常套手段として，重心座標と相対座標を導入する：

$$\overline{\mu} = \frac{\mu^1 + \mu^2}{2}, \quad \overline{\lambda} = \frac{\lambda^1 + \lambda^2}{2},$$
$$\Delta\mu = \frac{\mu^2 - \mu^1}{\sqrt{2}}, \quad \Delta\lambda = \frac{\lambda^2 - \lambda^1}{\sqrt{2}}. \qquad (18)$$

---

*1) シュラムは 2008 年に登山中の事故で亡くなってしまった．46 歳だった．

すると，(16) 式は

$$p_t^{N=2}(\boldsymbol{\lambda}|\boldsymbol{\mu}) = p_t(\overline{\lambda} - \overline{\mu}) \times p_t^{D=3}(\Delta\lambda|\Delta\mu) \quad (19)$$

と積に分解できることが分かる．ここで，$p_t^{D=3}$ は (6) 式で $D=3$ としたものである．関係式 (7) より，$D=3 \Longleftrightarrow \nu = 1/2$ であることと，変形ベッセル関数の公式 $I_{1/2}(z) = \sqrt{2/(\pi z)}\sinh z$ を用いた．重心は 1 次元ブラウン運動をし，相対座標は 3 次元ベッセル過程として運動するのである．つまり，ダイソン模型は 3 次元ベッセル過程を**多変数拡張**したものと考えられることになる．(16) 式に現れる行列式はカーリン・マクグリーガー行列式とよばれるものであり，衝突したら対消滅してしまう（vicious）ブラウン粒子系を表す[9]．その前の因子 $h(\boldsymbol{\lambda})/h(\boldsymbol{\mu})$ により再規格化がされ，非衝突条件の下での確率過程に変換されている．この変換は，関数論でいう**調和変換**である．

行列式を積表示するというクラッテンターラーの流儀を逆行して，調和変換を行列式

$$\frac{h(\boldsymbol{\lambda})}{h(\boldsymbol{\mu})} = \det_{1\le j,k\le N}\left[\Phi_{\boldsymbol{\mu}}^{\mu^j}(\lambda^k)\right] \quad (20)$$

に書き換えると，

$$\Phi_{\boldsymbol{\mu}}^{\mu^j}(z) = \prod_{\substack{1\le n\le N \\ n\ne j}} \frac{z-\mu^n}{\mu^j-\mu^n}, \quad j\ge 1 \quad (21)$$

という関数を得る．これは z の $N-1$ 次多項式であり，$\{\mu^n : 1\le n\le N, n\ne j\}$ に零点をもつ正則関数である．そこで，**複素ブラウン運動**

$$\mathcal{B}_t^j = B_t^j + i\widetilde{B}_t^j, \quad j\ge 1 \quad (22)$$

を導入して（$B_t^j, \widetilde{B}_t^j$ は独立な 1 次元ブラウン運動），$\Phi_{\boldsymbol{\mu}}^{\mu^j}(\mathcal{B}_t^k), j,k\ge 1$ を考えることにする．これは複素ブラウン運動の共形変換になっている．ところが，複素ブラウン運動の確率測度は**共形不変性**を持っているので，$\Phi_{\boldsymbol{\mu}}^{\mu^j}(\mathcal{B}_t^k)$ もまた複素ブラウン運動（の時間変更）なのである．ブラウン運動とは揺らぎなので，平均値は時間に依らず一定である．この性質をもつ $\Phi_{\boldsymbol{\mu}}^{\mu^j}(\mathcal{B}_t^k)$ を**共形マルチンゲール**という．

以上の考察から次の事実が導かれる[10]．ダイソン模型において，自由度 $f(\le N)$ の観測量を求めたいとする．それには，f 個の互いに独立な複素ブラウン運動を用意して，それらの経路に行列式共変マルチンゲール $\det_{1\le j,k\le f}[\Phi_{\boldsymbol{\mu}}^{\mu^j}(\mathcal{B}_t^k)]$ の重みを課した系を考えて，対応する観測量を計算すればよい（これが**行列式過程**[7]の本質である）．

(21) 式で $N\to\infty$ とすると無限乗積が得られるが，それを**ワイヤシュトラスの標準積**と見ると**整関数**が定義されることになる．したがって，$N=\infty$ においても共形マルチンゲール $\Phi_{\boldsymbol{\mu}}^{\mu^j}(\mathcal{B}_t^k)$ は well-defined であり，任意の観測量はその自由度と等しい個数の複素ブラウン運動からなる有限系の挙動で定まる．これでダイソン模型の**無限粒子極限**が構成されたことになる[10, 11]．ダイソン模型は長距離斥力相互作用をもつ**対数ガス**であり，統計力学の標準的な手法であるルエールの議論ではこれまで無限粒子系を構成することは不可能であった[8]．

本稿のタイトルが示唆する「分野超越的な研究」は，現在ますます深まっている．その証拠として，最後に 2 つの論文をあげておくことにする．1 つ目[12] は SLE を多重連結領域に拡張する試みであり，2 つ目[13] はランダム行列理論の幾何的リフトおよび (q,t)-拡張を提案するものである．

参考文献

1) 伊藤清 企画・監修，渡辺信三，重川一郎 編：『確率論ハンドブック』，丸善出版 (2012).
2) G.F. Lawler: *Conformally Invariant Processes in the Plane*, Amer. Math. Soc. (2005).
3) O. Schramm: *Israel J. Math.* **118**, 221–288 (2000).
4) 香取眞理：日本物理学会誌 **62**, no.7, 527–531 (2007).
5) 白井朋之，香取眞理：文献 1) の 11.4 SLE.
6) 香取眞理：日本物理学会誌 **55**, no.4, 276–280 (2000).
7) 香取眞理，種村秀紀：数学 **61**, no.3, 225–247 (2009); *Sugaku Expositions* (AMS) **24**, 263–289 (2011).
8) 長田博文：文献 1) の 11.5 ランダム行列.
9) 香取眞理：応用数理 **13**, no.4, 16–27 (2003).
10) M. Katori, H. Tanemura: *Electron. Commun. Probab.* **18**, no.4, 1–16 (2013).
11) M. Katori, H. Tanemura: *Commun. Math. Phys.* **293**, 469–497 (2010).
12) R.O. Bauer, R.M. Friedrich: *Math. Z.* **258**, 241–265 (2008).
13) A. Borodin, I. Corwin: arXiv:math.PR/1111.4408.

（かとり・まこと，中央大学理工学部）

量子純粋状態による統計力学の定式化

清水 明・杉浦 祥

1. はじめに

現代の物理学は，4本の主柱の上に組み上げられている．その主柱とは，時間と空間（時空）の構造を記述する「相対論」，その時空の中での物質や光などのミクロな振舞いを記述する「量子論」，マクロな振舞いを記述する「熱力学」，および，ミクロとマクロを繋ぐ「統計力学」の4本である．4本の柱のそれぞれに基本原理があり，それを集めたものが，現代の物理学の基本原理を成している．

このうちの統計力学は，熱力学で記述されるマクロ状態である「熱平衡状態」が，量子論ではどのように記述できるのかを与える理論である．最近になって，量子論を積極的に使って，その基礎を考え直す研究が盛んになってきた．従来は，古典論で基礎を論じることが多かったのだが，むしろ量子論のほうが，統計力学との整合性が高く，その基礎を論じるのには適しているのだ（と，筆者（AS）の講義では，いつも言っている）．

ところで，場の理論のように，量子論そのものの基本的枠組みは従来通りであっても，「より正しいラグランジアンは何か？」「それの示す性質は？」というような方向に発展が続いているのは判りやすい．しかし，統計力学そのものの基礎，すなわち基本的枠組みに，いまさら発展の余地があったのか？ そう思う読者も少なくないことだろう．

そのような疑念を持つのは普通のことで，例えば筆者（AS）が大学3年生のときに，統計力学の講義で，世界的な大家が「統計力学の基礎なんかを研究してはいけない．その応用を研究しなさい」と言った．同じようなことは，量子論についても，ある分野の世界的な大家が講義で言った[1]．また，十数年前に，某超大国の研究費支援の中心になっている組織で，ある国際会議の内容を審議しているときに，「統計力学の基礎的問題を議論するセッションも設けよう」と筆者（AS）が提案したら，「そのような（古い）問題に関して，何か新しい発展はあるのか？（あるわけないだろ）」というような意味の冷たい反応を示されたことを思い出す．

しかし，その後も，一部の人々により研究は細々と（？）続けられ，最近になって，一気に開花しつつあるように見える．まさに隔世の感である．そういえば，統計力学に限らず，量子測定理論でも，非平衡ゆらぎでも，筆者（AS）は，似たような経験・感慨をいろいろなところで書いている．基礎的な問題というのは，そういう宿命を持つのだろう．

さて，そうした「統計力学の基礎を考え直す」という研究の中では，量子純粋状態で熱平衡状態を表すことが，一つのキーポイントのようになっている面がある．そこで本稿では，最近我々が定式化に成功した，量子純粋状態による統計力学の新しい定式化[2,3]を紹介する．

後述するように，実は，量子純粋状態で熱平衡状態を表すこと自体は，さほど驚くことではない．真に驚くべきことは，ボルツマン原理まで含むす

べての基本原理を，量子純粋状態を用いた新しい形式に，書き換えることができたことである．

なお，筆者（AS）は，本誌（数理科学）をよくするための意見を述べよ，というようなお役目を拝命している．そのため，編集の方々がいつも，記事が専門的すぎる，ということで悩まれているのを知っている．そこで本稿は，思い切って，**ほとんど式を使わずに，きわめて易しく書いてみよう**と思う．その結果，専門家には不満が多い記事になるだろうが，ご不満を持った専門家は，論文[2,3]をご覧いただきたい．

2. 等重率とボルツマン原理

手元にある統計力学の教科書をあらためて眺めてみると，「基本原理」に掲げられた内容があまりにバラバラ（本によって違う）なので，こういう解説を書くときに困ってしまう．しかし，少なくとも筆者（AS）が受けてきた教育では，統計力学の基本原理は，「等重率」と「ボルツマン原理」だとされてきた．

等重率によれば，熱平衡状態と同じエネルギー値を持つような莫大な個数の量子状態（量子論で記述されるミクロ状態）が，等しい確率で混じっているような状態が，その熱平衡状態を表すとされる．式で書くと，熱平衡状態を表す密度演算子[意味がわからない読者はここは飛ばして良い！]が，

$$\hat{\rho} = \frac{1}{W} \sum_{n \,\in\, \text{energy shell}} |n\rangle\langle n| \tag{1}$$

で与えられる，ということである．ここで，$|n\rangle$ は n 番目のエネルギー固有状態，和は，そのうちの，熱平衡状態と（マクロに見て[4]）同じエネルギー値を持つような状態だけについての和，W は，そのような（和をとられる）状態の個数である．

また，**ボルツマン原理**によれば，W の対数が熱力学のエントロピー S に等しい：

$$S = k_{\mathrm{B}} \log W. \tag{2}$$

ここで，k_{B} はボルツマン定数と呼ばれる定数であるが，（SI 単位系ではない）自然な単位系を選べば 1 になる定数なので，1 だとみなしても構わない．この公式は，統計力学の創始者であるボルツマンの墓碑にも刻まれている，統計力学の核心の公式である．

3. 等重率は本質ではない

ところが，上記の 2 つの基本原理のうち，等重率については，筆者（AS）を含む一部の物理学者の間では，それは統計力学の本質を外している，と言われていた．本質は，等重率で混ぜてしまう莫大な個数の量子状態のほとんどすべてが同じ熱平衡状態を表すという点にある，というのだ．つまり，それぞれの量子状態 1 個 1 個がすでに熱平衡状態を表しているのであって，混ぜ合わせてはじめて熱平衡状態を表せるというわけではない．だから，等重率は本質を外している（これは，ずいぶん昔から一部には意識されていたことで，筆者（AS）の講義でも長年教えて続けてきたことであるが，明示的に書かれた解説や教科書が現れたのは，割と最近のことである[5~7]）．

それにも関わらず，等重率が間違った結果を与えない理由は何か，というと，それはいわば「赤い物をたくさん集めて混ぜてもやはり赤い」からである．例えば，熱平衡状態における圧力を理論的に求めることを考えよう．等重率に表れる莫大な個数の量子状態それぞれについて圧力を計算したら，ほとんどの状態が同じ圧力の値を持っている．そのため，これらの量子状態を混ぜ合わせてから圧力を計算しても，やはり同じ圧力の値を持つわけだ．つまり，等重率を採用しても計算結果は間違わないが，本質は外しているのである．

「計算結果が同じならどっちでもいいじゃないか」と思う人もいるかもしれないが，それは違う．例えば，多数の粒子が衝突しながら運動する様子を，コンピューターで解いてみると，やがて熱平衡状態に達するのが見て取れる．熱平衡状態に達した後は，どの時刻の瞬間の状態を見ても，熱平衡状態にある．例えば，各瞬間瞬間の状態におけ

る粒子の速さの分布を見ると，どの瞬間にも，「マクスウェルの速度分布」と呼ばれるきれいなガウス分布になっているのが見て取れる．これはまさに，各瞬間瞬間の状態が熱平衡状態になっている証拠（の一つ）である．ところが，各瞬間瞬間の状態というのは，たった一つのミクロ状態であり，等重率で仮定しているような，多数のミクロ状態を混ぜたものとはほど遠い．そのために，等重率で統計力学を理解している人には，このコンピューターシミュレーションの結果が理解しがたいものになってしまう．やはり本質を理解することが重要なのだ．

4. 熱的純粋量子状態

等重率が本質を突いていないのであれば，それを，現代物理学の4つの主柱の1本を成す，統計力学の基本原理に据えておくのはよろしくない．そこで我々は，統計力学の基本原理を書き換えて，新しく定式化することを目指した．

我々は，まず等重率を，より本質的な「熱平衡状態と同じエネルギー値を持つ莫大な個数の量子状態のほとんどどれもがその熱平衡状態を表す」という原理で置き換えた．そして，その一つ一つの量子状態を，thermal pure quantum (TPQ) state（熱的純粋量子状態，略して **TPQ state**）と呼んだ．

このように書くと，よく受ける誤解がある．それは，熱平衡状態を表す密度演算子 (1) を，いわゆる「純粋化」したものが TPQ state なのだろう，という誤解である．ここで，**純粋化** (purification) とは，ある量子系の混合状態 [意味がわからない読者はここは飛ばして良い！] を表す密度演算子を，対象系に別の量子系（実在系でも仮想的な系でもよい）をくっつけた，より大きな系のヒルベルト空間の中の純粋状態で表す，という数学的操作である．この意味の純粋化は常に可能であることが知られている．つまり，どんな量子状態も，最小限の大きさのヒルベルト空間の上の密度演算子で表すこともできれば，それよりも大きなヒルベルト空間の中のベクトルで表すこともできるのだ．従って，密度演算子 (1) についても，この意味の純粋化は可能である（実際，それを用いて統計力学を定式化する理論もある）．そうして得られた純粋状態が TPQ state なのだろう，と誤解されるのだ．

しかし，TPQ state は，拡大したヒルベルト空間のベクトルではなく，密度演算子 (1) が作用するのと同じ，最小限の大きさのヒルベルト空間のベクトルである．このため，TPQ state は，密度演算子 (1) とは全く違う量子状態を表す量子状態なのである．だからこそ，意外に思う人が少なくないのだ．それにも関わらず，統計力学の対象になるような物理量については，圧倒的な確率で，密度演算子 (1) と同じ結果を与える．

5. 統計力学の新しい基本原理

次に，統計力学のもう一方の基本原理であるボルツマン原理 (2) を考えよう．この原理も置き換えない限りは，「統計力学の新しい定式化」とは言えないのは当然であるが，実は，「等重率を排除した」とすら言えなくなるのだ．なぜなら，この原理に登場する W は，等重率で混ぜられていた量子状態の個数だったから，$S = k_{\mathrm{B}} \log W$ を使うことは，実質的には等重率も使っているようなものだからである．そこで我々は，ボルツマン原理まで，TPQ state を使った何らかの原理に置き換えることを目指した．

しかし，一見すると，たった1個の TPQ state から S を求めるのは，不可能そうにも思える．圧力や磁化などの，いわゆる**力学変数**（量子力学の可観測量であるような変数）だけであれば，TPQ state が熱平衡状態を表すことから，容易に求まる．単に，TPQ state における値（量子力学的期待値）を量子論で計算すればよいからだ．ところが，マクロ系の物理学である熱力学・統計力学には，力学変数だけではなく，**純熱力学変数**と呼ばれる一群の物理量が登場する．それは，エントロピー S や温度とか，あるいは化学ポテンシャルや自由エネルギーなどといった物理量のことであり，

理論的には，S から微分操作などによって誘導される物理量である．この純熱力学変数が登場することこそが，マクロ系の物理学の最大の特徴である[4]．

しかしそれゆえに，純熱力学変数は，量子力学の（通常の意味の）可観測量ではない．そのため，TPQ state における値（量子力学的期待値）を量子論で計算すれば求まる，というわけにはいかない．実際，ボルツマン原理を見ると，W は等重率で混ぜられていた量子状態の個数だったから，たった1個の TPQ state から仲間の個数が分かるわけがなく，したがって S も求まるわけがない…ように思える．いわば，信州の熊（TPQ state）を一頭だけ捕まえて，その熊だけを見て信州全体の熊の頭数（W）を当てろ，と言われているようなものである．そりゃ無理に決まってる…と思ってしまいがちである．

ところが，我々は，規格化定数（量子状態を表す状態ベクトルの長さを1にするためにかける定数）の中に S の情報が刻まれているような，実に都合の良い TPQ state を構成することに成功したのだ[2,3]．これはいわば，信州の熊の胸毛をうまい具合に散髪して，胸の模様が S の値を示す数字になっているようにしたようなものである．そういう TPQ state ならば，たった1個求めてやるだけで，圧力や磁化などの力学変数のみならず，エントロピー S や温度などの純熱力学変数まで，すべて求めることができるのだ．

こうして我々は，熱平衡状態をたった1個の量子状態で表して，その状態ベクトルから統計力学の対象になるすべての物理量が求まってしまう，という全く新しい統計力学の定式化を行い，基本原理を書き換えることに成功した．

6. 新しい定式化の有用性

ところで，理論物理学者の間では，「新しい定式化なんてものは，たいていは実用性に乏しい形式論に過ぎない」という常識がある．これは，「我々は○○の新しい定式化を行った」と主張する論文の査読を何度も依頼されているうちにしみこんだ，哀しい経験則である．

そこで我々は，自分たちの定式化をこの経験則の例外にするべく，最初から有用性・実用性までも意識しながら定式化を進めた．そのための試行錯誤の過程で，実は，論文[2,3]に書いたもの以外にも様々な TPQ state を作り上げた．その中には，論文に書いたものよりも実用性が高いかもしれない状態も含まれていたが，理論の美しさと十分な実用性とを兼ね備えていたものだけを，論文に書いたのであった．

そういうわけで，上記の哀しい経験則に反して，我々の定式化は実用性も兼ね備えている．実際の物理系を統計力学で解析しようとするとき，等重率に基づく通常の定式化では，莫大な個数の量子状態を混ぜたものを求める必要がある．しかし，有限温度の熱平衡状態を解析しようとすると，この作業は，とても大きなサイズの行列のすべての固有値を求めるような作業になり，著しく困難である．ところが，我々の新しい定式化を用いると，単に行列のかけ算をするだけで済んでしまい，はるかに簡単な作業になるのだ．

なぜ計算が簡単になったのか？ その理由を一つ一つ説明すると長大になってしまうのだが，突き詰めると，その本質は，パラダイムシフトを起こしたことにあると思う．統計力学の計算手法は多種多様だが，その大部分は，カノニカル集団などの，従来の統計力学の定式化で与えられた表式を計算することを目標にしていた．つまり，同じ表式をいかに効率よく計算するか，という競争だった．

それに対して我々の定式化では，計算すべき表式そのものが，従来とは全く異なっている．それにも関わらず，計算結果が従来の定式化の結果と圧倒的な確率で一致することを，我々は厳密に証明したのである．これはまさにパラダイムシフトであり，その結果，従来とはまるで違う性能が得られ，適用範囲にも制限がなくなったのである（これに対して，従来の有力な方法は，フェルミオン系には使うのが困難な方法だったり，空間次元が1次元でないと使えない方法だったり，何らかの

制限を持っていることが多かった）．さらに，我々の定式化では．計算結果の誤差がどのくらいあるかも計算できてしまうので[3]，結果の信頼性が保証されているのも大きな利点である．

このように，我々の定式化が高い実用性を持っていることは，理論的にはかなり明白なのだが，それでも具体例で実証しないといけない．その具体的な実証については，例えば 8 節で触れる「カゴメ格子」のような，従来の方法では計算が困難だった系の問題を，我々の定式化を忠実になぞった数値計算で解くことによって，実証しつつある．

7. canonical TPQ state

通常の統計力学の定式化では，「ミクロカノニカル（microcanonical）集団」もあれば，単なる「カノニカル（canonical）集団」もあり，他にも「グランドカノニカル（grand canonical）集団」などがある．どの名前にも「カノニカル」が付いているために，呼び名はややこしいことこの上ない．

しかし，呼び名はややこしくても，その論理構造は単純明快である．詳しい解説は教科書[6,7]でも見ていただくとして，結論は，次のようになる：通常の統計力学の定式化では，その基本原理はミクロカノニカル集団について与えるものの，(i) 様々な「カノニカル集団」（グランドカノニカル集団など）が構成できて，(ii) そのどれもが，熱力学極限[*1]で，熱力学的に等価な結果を与える．だから，問題に応じて便利な集団を自由に選んで使えばよい（**大学院生以上への注：**ゆらぎや相関関数についても，全系のサイズに比べて十分に小さい部分系を見れば，どの集団でも同じ結果になる．熱力学極限では，自動的にこの状況になるので (ii) が言える．詳しくは，教科書[7]などを参照されたい）．

この 2 点が，統計力学をいっそう強力な理論にしている．例えば，実用的には，ほとんどの場合，ミクロカノニカル集団ではなく，カノニカル集団を用いる．集団の違いは，数学的には，熱平衡状態を指定する独立変数を何に選ぶか，という違いに過ぎないのだが，実用的な計算の難易度は，かなり異なることが多いのだ．

そこで，我々の定式化でも，熱平衡状態を指定する独立変数を（例えばエネルギーから温度へと）自由に取り替えられるようにしておくのが望ましい．我々は最近，それに成功した[3]．すなわち，以下のことを示すことができた：(i) 独立変数を取り替えた場合にも同様に TPQ state が構成できる．(ii) どの TPQ state も，熱力学極限で，熱力学的に等価な結果を与える．だから，問題に応じて便利な TPQ state を自由に選んで使えばよい．(iii) しかも，独立変数が異なる TPQ states の間に，美しい数学的な関係式があり，どれか一つの TPQ state を得れば，他の TPQ states も得ることができる．

これにより，TPQ state を用いた統計力学の定式化は，従来の定式化と同様のレベルにまで完成した．そして，ミクロカノニカル集団と同じ独立変数の TPQ state を **microcanonical TPQ state**，カノニカル集団と同じ独立変数の TPQ state を **canonical TPQ state** などと呼ぶことにした．

さらに，(iii) のおかげで，相転移や低温比熱も扱いやすくなった．例えば，（定積）比熱 c が「発散する」一次相転移[*2]を調べたいとしよう．エネルギー密度を u とすると，

$$c = \frac{\partial u}{\partial T} = \left(\frac{\partial T}{\partial u} \right)^{-1} \tag{3}$$

であるから[4]，もしも温度 T を独立変数に選んだ，カノニカル集団や canonical TPQ state を使う場合には，u を T の関数 $u(T)$ として求めて，それを微分してみることになる．ところが，c が「発散する」一次相転移では，$u(T)$ は T の不連続関数になる[4]．不連続関数を，例えば数値計算で求めるのは，きわめて難しい．ところが，独立変数を

*1） エネルギー密度や粒子密度を一定に保ったまま（つまり，エネルギーや粒子数を体積に比例して増大しながら），体積を無限大にする極限．

*2） 残念ながら，マクスウェルの等面積則を基本原理に据えてしまうなど，一次相転移の扱いがずさんな教科書は少なくない．一次相転移の正確な扱いは，最近の熱力学の教科書[4]を参照されたい．

u に変更すれば，今度は T を u の関数 $T(u)$ として求めて，それを微分してみることになる．その場合には，最も特異性が強い相転移である一次相転移であっても，$T(u)$ は u の連続関数になることが保証されている[4]．c が「発散する」ところでは，単に，$T(u)$ のグラフが平らになっているだけである[4]．そのため，u を独立変数に選んだ microcanonical TPQ state を使えば，一次相転移も精度よく扱うことができる（従来の定式化でこれを行うには，ミクロカノニカル集団を使うことになる．ただし，従来の定式化でミクロカノニカル集団の計算をすることは，一般にはかなり難しい）．

他方，一次相転移は起こらないが，低温における c の振舞いに特徴がある，というような系を調べるときには，T を独立変数に選んだ canonical TPQ state を使うほうが便利である．なぜなら，熱力学第三法則から $T \to 0$ で $c \to 0$ となる[4]ために，(3) からわかるように，$T(u)$ の微係数は $T \to 0$ で発散する．そのため，u を独立変数に選んだ microcanonical TPQ state では，低温比熱は扱いにくい．その点，canonical TPQ state であれば，$u(T)$ は $T \to 0$ で傾きが緩くなるだけなので，それを計算するのに何の困難もない．

このように，対象系に応じて，便利な独立変数は異なるのだが，我々の定式化では，(iii) のために，自由に独立変数を（形式論レベルではなく，実際の計算のレベルで）取り替えることができる．

8. おわりに

6 節で述べたパラダイムシフトによる有用性と，7 節で述べた独立変数を変更しても計算の容易さが変わらないこととがあいまって，従来は解析が困難とされていた系の性質を，広い温度範囲で明らかにすることができるようになった．例えば，名前だけでもややこしい「カゴメ格子上の反強磁性量子スピン系」の比熱やエントロピーなどを，従来よりも大きなサイズで，低温から高温まで，少ない誤差で計算することができた．今後は，多種多様な物理系に適用されることだろう．

また，数値計算だけでなく，解析計算（厳密解など）も，従来よりも簡単にしてしまう可能性を秘めていると，我々は考えている．なぜなら，対角化のような作業が不要になり，ただ単にかけ算ができればよくなったからである．このような解析計算への応用についても，今後の発展を大いに期待している．

さらに，一様な物理系に限らず，多様な構成要素からなる非一様な物理系の解析も可能になった．このことから，生物関連物質などの解析にも適用されることが期待される．筆者（AS）は個人的には，これを用いて「量子機械」の設計を行うのを楽しみにしている．

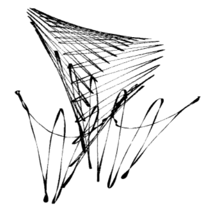
第 1 節で述べたように，統計力学の基本原理にかかわる研究のような，基礎的な問題というのは，プロの物理学者の間では敬遠される傾向が強い．しかし，「隠れた変数の理論」にかかわるベルの不等式[8]でもそうだったが，そういう基礎的な問題の研究により，思わぬ世界が開けることがある．若い方々には，普段はもっと応用的な問題に取り組むというのはよいことなのだが，基礎的な問題も常に忘れないように考え続けていただきたい，と願っている．

参考文献

1) 清水明，『物理の道しるべ～研究者の道とは何か～』（数理科学編集部編，サイエンス社，2011）130–141.
2) S. Sugiura and A. Shimizu, *Phys. Rev. Lett.* **108** (2012) 240401.
3) S. Sugiura and A. Shimizu, arXiv:1302.3138.
4) 清水明，『熱力学の基礎』（東京大学出版会，2007）.
5) 杉田歩，別冊数理科学 2010 年 1 月号，188–194.
6) 田崎晴明，『統計力学 I，II』（培風館）.
7) 清水明，『統計力学の基礎』（講義ノートを単行本化するための原稿として，清水研 HP にて公開中（http://as2.c.u-tokyo.ac.jp/lecture_note/SPbook.html）…書き終えたら出版します…いつ書き終えるんだ？というご叱責をたくさん受けていますが…）.
8) 清水明，『新版 量子論の基礎』（サイエンス社，2004）.

（しみず・あきら，東京大学大学院総合文化研究科）
（すぎうら・しょう，東京大学大学院総合文化研究科）

統計力学の温故知新



鈴木 増雄

伝統ある統計力学の分野で昔からの基礎的問題に取り組み成果を上げるには，研究に長い年月を要する．そういう息の長い研究は若い人には温故知新と映るであろう．そもそも，統計力学は，身近な経験にもとづいて体系化された熱力学をミクロに基礎づける学問である．この一般性の故に，統計力学は物性科学の大きな一つの柱となっている．熱力学・統計力学において，熱エネルギーは他の力学的エネルギーや電気エネルギーとは質的に異なる特徴を持っている．それは温度によってその利用価値が異なるからである．その違いを特徴づけるのがエントロピーである．その増大によって不可逆性を表現したものが熱力学第二法則である．

このエントロピー S を初めてミクロに表したものがボルツマンの公式 $S = k_{\rm B} \log W$ である．ただし，W はミクロな状態数である．これをもとにギブスは統計集団（カノニカル集団）を導入して平衡統計力学を体系化した．ボルツマンの対数公式とギブスの指数分布とは，変分原理の立場からみると互に双対関係にある．すなわち，逆温度 $\beta(= 1/k_{\rm B}T)$ とエネルギー E に関するルジャンドル変換で互に対応している．

次に，平衡に近い不可逆現象に関して大きな発展があった．それは，輸送現象に関するオンサーガーの相反定理の発見である．これは，ミクロな時間的ゆらぎが平衡系では時間反転に関して対称的であることから導かれる．筆者が学部学生だった 1950 年代末には，恩師久保亮五先生によって輸送現象に関する線形応答理論が確立され，アインシュタインの散逸揺動定理やオンサーガーの相反定理が統計力学的に導出された．この線形応答理論は物性物理の多くの分野で使われている．

一方，オンサーガーの相反定理は，エントロピー生成（エネルギー散逸）最小という変分原理を保障する．プリゴジンのグループは，この変分原理を非線形輸送現象に拡張しようと試みた．その第一歩として，定常系の安定性の条件，すなわち「発展規準の不等式」を提唱した．しかし，(i) 線形応答におけるエントロピー生成の統計力学的導出と，(ii) 非線形輸送現象におけるエントロピー生成に関する変分原理を作ることは長年の難問であった．

最近，これらの難問が解決された[1~4]．まず，上記の問題 (i) に対しては，フォン・ノイマン方程式の解を外場の高次まで考慮し，1 次の線形項とは対称性の異なる 2 次以上の対称状態からエントロピー生成が導けることがわかった[1,2]．もちろん，2 次の項は 1 次の項を用いて表されるので，エントロピー生成の最低次の項は線形の輸送係数（久保公式）を用いて表現される．したがって，輸送現象の不可逆性はこのエントロピー生成が正であること，すなわち輸送係数が零ではなく正であることに帰着する．この正値性は，系の自由度が無

限大であることによって保障される．

問題 (ii) の非線形輸送現象に対する変分原理を見出すことは，線形応答の場合のように瞬間のエントロピー生成を対象にしたのでは無理であり，平衡から非平衡状態になるまでの途中のエントロピー生成を考慮した変分原理を導入することにより可能となった[3,4]．この新しい変分原理（以下，新変分原理とする）は線形の場合には，オンサーガーの瞬間のエントロピー生成最小の原理を結果的に与えることになる．非線形の場合には，相反定理が破れているので複数の外力に対するエントロピー生成（エネルギー散逸）の総和に関する変分原理は積分形にしても成り立たず，外力ごとの個別に積分形のエントロピー生成最小の変分原理が成り立つことが示せる[3,4]．この新変分原理から，グランズドルフ–プリゴジンの発展規準不等式が外力ごとに個別に強い形で導ける．また，新変分原理は非線形の電気回路，熱拡散，粒子拡散，化学反応などに適用してその妥当性・有効性が確められている[3,4]．このように非線形不可逆輸送現象に対しても変分法の解析が可能となり，具体的に近似解を求める新しい道が拓けたことになる．

さらに，上記のように定常状態の不可逆性を扱う場合にも平衡から非平衡状態になる途中の過程を考慮することが本質的であるとする新しい視点に立つと，散逸力学系（例えば抵抗のある振動子系など）の変分原理が作れる[5]．それは，経路に依存した汎関数を用いてエネルギー散逸の効果をラグランジアンに取り込むという定式化である[5]．この新理論は，経路に関する積分すなわち“散逸ラグランジアン”の汎関数積分（“散逸作用”）を最小にする変分原理であり，今までの時間反転に関して対称な力学系と時間反転対称性の破れた散逸系を統一的に扱う理論となる．この拡張されたラグランジアンを用いると，散逸力学系の経路積分量子化が可能となる[5]．

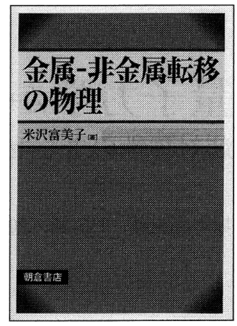
以上に述べた通り，統計力学はものの見方に関する学問であり，同時に複雑な問題を簡単化して扱う普遍的な方法を提供するところに特徴がある．前半で述べた 2 つの概念的な難問 (i) 輸送現象におけるエントロピー生成と不可逆性，および (ii) 非線形不可逆輸送現象の変分原理の構成は，共に，定常過程であるにもかかわらず，平衡から任意の非平衡状態までの途中の過程を考慮すること（(i) では外場の奇数次と偶数次の異なる対称性を持った状態密度の時間的絡み合い，および (ii) では瞬間のエントロピー生成ではなく，全過程のエントロピー生成を変分すること）により解決された．しかも，この大域的な視点に立つと，不可逆非定常状態の変分原理が構成できることになる．すなわち，上ですでに簡単にふれたように，不可逆過程の経路に沿った熱発生の積分を力学的ラグランジアンにつけ加えた“散逸ラグランジアン”を導入することにより，可逆な力学系の変分原理を不可逆な力学系に拡張することができる[5]．こうして，散逸力学系（古典的な減衰振動子系など）を，この散逸ラグランジアンの指数経路積分により量子化することができることになった．ファインマン達は，熱浴まで入れた全系の（通常の力学的）ラグランジアンを用いた経路積分を扱い熱浴の自由度を消去して量子化を行った[6]．今回の散逸系の経路積分量子化は，最初から（古典的に）熱浴の効果が入っているので大変実用的である．これにより，散逸系では不確定性関係式などがどうなるか，最近話題となっている観測と不確定性原理との議論にも関連して新しい発展が期待される．

参考文献

1) M. Suzuki, *Physica A* **390** (2011) 1904.
2) M. Suzuki, *Physica A* **391** (2012) 1074.
3) M. Suzuki, *Physica A* **392** (2013) 314.
4) M. Suzuki, *Physica A* (2013) in press.
5) M. Suzuki, submitted to *Physica A*.
6) U. Weiss, *Quantum Dissipative Systems*, World Scientific, Singapore, (2012).

（すずき・ますお，東京大学名誉教授）

金属–非金属転移の物理



米沢富美子著，A5 判，264 頁，本体 4600 円，朝倉書店

アモルファスをはじめとする不規則系や金属絶縁体転移等の分野で多くの研究業績を発表してきた著者の，渾身の一冊である．「まえがき」でも述べられているように，金属–非金属転移の“主な機構を一堂に集め，まとめて”論じることを目的として書かれている．現在，金属–非金属転移の主要なメカニズムとして考えられている，パイエルス転移，ブロッホ–ウィルソン転移，アンダーソン転移，モット転移のすべてが盛り込まれている専門書である．転移の機構にはそれぞれの特徴を反映した違いがあるが，基本的には物質中における電子のエネルギーバンドの観点から説明がなされている．最初の 2 つの章では，物性物理学，特に電子輸送現象理論の基礎が簡潔に説明されており，大学院レベルの教科書，輪講書としても利用しやすい構成になっている．3 章から 7 章までは，個々の機構を論じており，それぞれ独立に読んでも理解できるような記述になっているので，時間の配分を調整する必要がある場合などにも利用しやすいであろう．

著者は物性理論の専門家ではあるが，本書では多くの現実の物質が金属–非金属転移に関わる例として取り上げられており，金属–非金属転移現象が，単なる机上モデルの問題ではないことを，「物（もの）」に即して初学者にも十分に伝わるよう工夫されている．これは本書の特色の 1 つである．また，著者の研究業績の重要な部分をなしているブロッホ–ウィルソン転移に多くのページを割いていることも特色として挙げられる．ブロッホ–ウィルソン転移は，バンド交差に起因する金属–非金属転移であるが，バンド交差の原因は，バンド幅の増加とバンド間隔の減少の 2 つが考えられ，本書ではその原因に応じてそれぞれ，タイプ I，タイプ II と名付けられている．温度や圧力など，物質が置かれている環境条件や，物質の組成制御などによって，転移がどのように起こるかを，いろいろな物質を例に挙げながらわかりやすく説明している．教科書や専門書を執筆する際には，その本でなければ得られない知見を必ず含めるべきであるとよく言われるが，本書の場合は，ブロッホ–ウィルソン転移を扱っている 4 章と 5 章が，まさにそのような内容になっていると思う．

この種の専門書では，どうしてもミスプリントの類は避けられないものであるが，初版本の割には比較的ミスプリントなどは少ないほうであり，よく推敲されたことがうかがえる．ただし，気になる点がないわけではない．例えば，2 章のフェルミ気体の説明のところでは，化学ポテンシャルをフェルミエネルギーと呼んでいて，絶対零度の化学ポテンシャルであるフェルミエネルギーと，温度にも依存する可能性のある化学ポテンシャルの明確な区別がなされていない．この傾向は物性物理の和書でしばしば見かけるものであるが，区別は明確であるべきだと思う．付録も，本文の記述に有用な基礎的な事項が取り上げられていて充実しているが，付録 E（結晶構造の分類）と F（強束縛近似における電子エネルギー）の内容は一部重複しているので，もう少し整理したほうがよかったかも知れない．

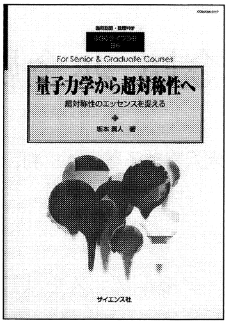
本書が，目的として掲げた“金属–非金属転移の主要な機構をまとめて議論する”ことについては，非常によく達成されていると言える．本書を読むことによって，読者は電子物性の基礎から最先端の金属–非金属転移研究の内容までを学ぶことができる．「おわりに」で，N.F. モットが P.P. エドワーズに宛てた手紙をもとに“金属とは何か”を論じているが，これもまとめとしてよく書かれていて，楽しんで読むことができた．

電子輸送現象は，物性物理学の中でも最も重要な位置を占めるものであり，中でも金属–非金属転移の機構を理解することは，物性物理学の根本を理解することにつながっていると考えられる．物性物理学はそのカバーする分野が広大であり，教科書の形でまとめることは大変困難である．本書のような切り口で，ある限られた分野の専門的な学習を通して，物性物理学，ひいては物理学全般の理解につなげていくような勉強方法は，これからますます必要となると思われるが，本書がそのような学習の助けになることは明確であり，長くこの分野の標準的な教科書として利用されるようになるのではないかという予感がする．

小野　嘉之（東邦大学）

量子力学から超対称性へ
超対称性のエッセンスを捉える

坂本眞人著，B5 判，208 頁，本体 2476 円，サイエンス社



以前一般向けに著した本の中で，超対称性に触れる折があったとき，超対称性の「超」とは「未だかって例を見なかった」というほどの意味だが，われわれの理解を「超えている」対称性であると意地悪く解釈してもそう間違いではない，と書いたことがある．それは実はまじめな述懐であって，二つの理由がある．一つは，超対称性は量子力学を抜きにしてはきちんと語れない概念であるため，一般の読者にはかなり敷居が高いということがある．もう一つは，専門家の立場からしても，あまりにも美しい対称性であるにもかかわらず，今のところ完璧にその姿を隠している，という意味で謎に満ちた存在であるからである．この状況は，昨年ヒッグズ粒子らしき新粒子の存在が確認され，さらに超対称粒子発見への期待が高まっている現在でも，残念ながら変わっていない．

にもかかわらず，超対称性は素粒子論を志すものにとって重要なトピックである．それは自然の統一理論の最も有力な候補である超弦理論を支える一つの柱であると同時に，QCD（量子色力学）等の基本的なゲージ理論の複雑なダイナミックスを理解するために，より対称性の高い様々な超対称ゲージ理論をモデルとして考えることも有効な手段となるからである．

さて本書は，この不可思議な「超対称性」を，好奇心の強い学部生を念頭において，徹底的にわからせようとするユニークな本である．超対称性は，現代素粒子理論の一つの可能な基礎構造として，出現してきたものなので，通常は場の量子論の枠組みの中で議論される．しかし，表題にも現れているように，その本質は有限自由度の量子力学の範囲内で説明することができる．そして本書は最初から系統的にその枠組みの中で論理を展開する，という明確な視点を持つと同時に，それを通じて量子力学自体の理解を深めさせる，という二重の目論見をもって書かれている．基本的な式の導出，証明はほぼ一行も飛ばさずに丁寧に書いてあり，著者の「わからせてやろう」という並々ならぬ熱意がそこここに溢れている．読者がその熱意についていけるだろうか，といらぬ心配をしてしまいそうなほどである．

少し中身を覗いてコメントをしておこう．本書の章立ては次のようになっている．第 1 章：超対称性とは？．第 2 章：円周上の自由粒子と超対称性．第 3 章：超対称性と一般的性質．第 4 章：超対称量子力学—行列表現—．第 5 章：厳密に解ける量子力学模型．第 6 章：対称性と保存量．第 7 章：超対称量子力学—ラグランジアン形式—．第 8 章：超空間と超場形式．第 9 章：さらに先へ進みたいあなたへ．付録 A：超対称場の量子論の基本的性質．

第 1 章で超対称性の魅力について触れたあと，第 2 章で最も簡単な 1 次元の粒子系を例にとって，超対称性を具体的に導入している．第 3 章では一転して超対称性を持った系が示す一般的な性質を半ば「公理的」に列挙して解説している．記述は丁寧だが，かなり抽象的で，初心者には物理的な直観が働きにくい印象をうける．次の第 4 章で展開される超対称量子力学の典型的な例である Witten モデルについての解説を読んでから第 3 章に戻る方がわかりやすい気がする．第 5 章は厳密に解ける模型を集めてその構造を述べたもので，少し程度が高い．最初は飛ばして後で読むと良いかも知れない．第 6 章は対称性とそれに起因する保存則の量子力学的な表現，という基本中の基本について述べている．第 7 章において，初めてグラスマン数が導入され，ラグランジアン形式が整備されて，場の理論へと向かうための準備がなされる．ちなみにこの章の最後にもうけられた「ニコライ変換」と呼ばれる自由粒子系への写像についての解説は，教育的であり興味深い．第 8 章では量子力学の範囲で超空間と超場形式が述べられている．ここまで進んできた読者は自然に第 9 章で紹介されているさらに進んだ本や文献へと向かうことができるであろう．というわけで，著者の熱意にのせられて本書を一行一行きちんと理解していけば，超対称性に関する基礎ができあがることは間違いない．

風間 洋一（東京大学大学院総合文化研究科）

「数理科学」は語る

30年前から現代へのメッセージ

安西 祐一郎

1983年6月号

1983年6月号に書いた文章は，学習と思考の研究に関する13ページの長文である．あれから30年が経つが，筆者の考え方は基本的には今でもほとんど変わっていない．

この号が「知識構造」特集だったのは，当時人工知能の分野で知識を陽に表現する試みが重要な課題になっていたことの反映だろう．しかし，この特集号には，「数理科学」という雑誌の性格からか，むしろ知識の論理，意味，心理など，哲学や理学に近い文章が並んでいる．筆者のものも，技術とは無縁の心理学的な表題がつけてある．

この文章を書いた当時，筆者は人工知能技術の課題を扱いながら，すでに，今日でいう「認知科学」と呼ばれる科学の営為にのめり込んでいた．特集号が出て間もなくの1985年3月に出版した『問題解決の心理学』(中央公論新社) は筆者のライフワークの基点になり，その後1990年代にかけて，数理的な基礎を踏まえた認知科学の著書や編書をいくつか出版するようになった．1983年6月号の文章は，今から思えばその準備の一つであった．

あれから30年経った今，筆者は慶應義塾大学湘南藤沢キャンパスで認知科学の授業をしている．その底にある考え方は30年前に書いた内容と不思議なくらい一致している．研究者にとって若いころに得た知見が一生の糧になるということが理系ではよく言われるが，筆者のような研究テーマでも同じことなのかもしれない．

その考え方の基礎は，人が学習する過程を，認識が行為を呼び起こし行為が認識を呼び起こす「認識と行為のサイクル」の中で新しい「知識」が獲得され，その知識が新しい認識と行為のサイクルを引き起こす，という動的な過程とみなすものである．この考え方自体は素朴な発想としては昔からあるものだが，いろいろな知識領域に対して知識表現を仮定した動的過程のモデルを構成し，そのモデルを実験や観察のデータに照らして評価することによって，学習や思考の新しい理論を創ることができる．また，多様な応用の場を産み出していくことも可能になる．



学習や思考のような認知現象は，外からは観察しにくい現象であり，だからこそ数理科学や情報科学の理論によって研究を支えることが不可欠である．その意味でも，数理科学の発展は，物質の科学だけでなく人間や社会のかかわる学問にとってきわめて大切である．その数理科学を標榜する雑誌が，30年前に自分のライフワークを準備するような文章を載せていただいたことに，あらためて感謝したいと思う．

(あんざい・ゆういちろう，日本学術振興会)

リレー連載

数学的な感覚の探求

思考法の源を探る

第10回

待ち受ける心

小谷　元子

1872年に，F. クラインにより提示されたエルランゲン・プログラムの中で，幾何学とは「変換群の作用で不変な性質を調べる学問分野」と規定されている．中学校で学んだ「三角形の合同」を考える上で，その背後には「合同変換で変化しない量」を調べるユークリッド幾何学という枠組みがあった．そして，高校の頃，なんとなく耳に入ってきた「トポロジー」（位相幾何学）には，2つの図形が同じであると定義するために「位相構造」という概念が隠れていた．大学の数学科に入って位相空間論や多様体論を学び，「構造」とは天与のものとしてあるものではなく，人間が与えるものだと理解したのが，数学という学問が何を目指しているのかを仄かに感じ取った最初であったように思う．数学の研究を職業とするようになってからは，解こうとしている問題に対して，「適切な構造」とは何かを真剣に意識するようになった．

1. 問題を解く

「大学で数学の教育や研究をしています」と自己紹介をすると，「いや～，数学好きだったなあ（嫌いだったなあ）」，「高校までは好きだったんだけど，大学に入ったら，それまでの数学とは全く違うでしょう」と答えが返ってくる．そして，その後に，「数学の研究って，いったいどんなことするんですか？」，「今でも新しい問題ってあるんですか？」という質問を受ける．

「新しい問題があるのか」という問に，ヒルベルトの23問題やミレニアム問題をあげて，300年間の難問であったフェルマー問題や，ポアンカレ問題が最近解かれたニュースをもって答えることもある．これらの難問には，それぞれにその問題自体にも，また解決への挑戦の歴史にも魅力があり，語ることは楽しい．しかし，答えながら，自分が惹かれている数学がどんな学問なのか，何を目指しているのかが，うまく伝わらないような焦りの気持ちが湧いてくる．問いかける側の意図する「問題」と，数学者の考える「問題」という意味のすれ違いにあえて目をつぶり回答する気持ち悪さがある．また，すべての数学者が何百年ものの未解決問題に挑んでいるわけでもない．本当は，ヒルベルトが問題を提起した動機と，その後，それらをもとに非自明な形で花開いた近代数学についてゆっくりと語り，数学という学問の核心に話を持っていければ良いのである．しかし，偉大な問題とその解決の歴史を語る代わりに，むしろ，折角の機会なのだから「そもそも数学とは問題を解く学問じゃないんだよ」と率直に答えてみたい．高校までの数学と大学で学ぶ数学は大きく異なると多くの人が感じる「ところ」を説明したいのだ．

高校までの数学は，概ね19世紀，20世紀前半までに確立した概念・定理・公式を理解し，使いこなす訓練を主体としている．理解の正しさを確認するために「問題」を解くのであるが，だんだん，この「問題を解く」に力点が置かれ，解けるように作成された問題を，想定された方法で解く技術が数学と理解されているように思う．すなわち，概念の理解より，「公式」を使う訓練に多くの時間が割かれるというわけである．大学に入っても，数学の授業は「諸科学の基礎となる概念・定理・公式を理解し使いこなす訓練」という点で変わりはないが，「問題を解く」ことではなく，「概念の理解」により力点が置かれる．例えば「無限」，「極限」，「(非) 線形性」，「位相」などのように，人間の直感だけではどうにも解決できない問題を解決するために，人類が，歴史の中で，どのように着想を得，新しい概念を「定式化」したかということを大学では学ぶ．授業では，その「概念」や「定式化」が，「定義」と「定理・証明」の形で提示され，しかも数学者は「淡々と語る」ことが多い．そのため，問題意識が分かりにくく，バリアを感じる学生も多いようだ．元々は素朴な直感をもとに発見的に産まれた「概念」，「定式化」であっても，その「完成形」は抽象性が高く，「神が与えたもの」に見える．しかし，このような概念や定理は，実は我々と同じ人間が，試行錯誤の末に作り上げているものなのである．ある種の問題を解決するために理論を作り，様々な概念を産み出し，その理論の下で解決へのステップを定理という形で提示し，証明することが数学者の仕事なのである．ここでいうところの「問題」は，理解が正しいことを確かめるために作られた「解ける」ことの保証された問題ではなく，課題を解決するために定式化された記述のことであり，その設定が正しいのか，そもそも解ける問題なのかも明確ではないし，解くための道具も整っていない．その道具を作り上げて，解けるように問題を「定式化」していくところからが「問題」なのである．冒頭に述べたように，適切な「構造」は何かを見出し，その「構造」を入れる，もしくは入れることのできる対象を特定するということが最も大切な作業になる．

私は中学生の頃から「数学の研究者になりたい」と望んでいたが，そのときに漠然と考えていたのは，たくさんの概念や定理を理解し，使いこなし，問題を解くことだったと思う．しかし，大学に入ったある日，天啓（？）が下った．「定理は人間が作ったものであり，数学者とは，そのような「定理」を自ら作る人たちなのだ」と初めて認識した．そしてすっかり怖くなってしまった．教科書に書かれた非自明で完成度の高い理論と同じようなものを自分が作り上げることなどできるようには思えなかった．数学者になることは，私にとって他の選択肢を考えることができないくらい強い望みへと育っていたので，そのときの絶望感，不安感は大きかった．この時点の私は，憧れの数学とは「いったいどんなことするんですか？」が朧げに見えてきたが，「今でも新しい問題ってあるんですか？」という問いの答えが見えず，「問題」と「問題」の差の大きさに，「私にでも挑戦できる」問題などはありえないように思えた哀れな学生であった．修士課程に入って研究の真似事を始めて，自分の立ち位置を確認し，また「数学の懐の深さ」を知り，自信を回復したことなどは，以前にどこかで書いた．

このように，数学とは与えられた問題を解く学問ではなく，理論や概念を作る学問である．社会の課題や，諸科学の課題が，日々産まれ，それに応じて，それを解決するための道具として新しい数学理論が必要になる．また，数学独自の問題意識により，理論や概念がより深まっていく．先に述べたヒルベルトは，その講演の中で，数学という学問が「思考と経験の相互作用」によって発展し，良い問題の提示がその発展を促してきたことを見事に語っている（参考『ヒルベルトの挑戦』青土社，ジェレミー・J・グレイ著）．宇宙の中のちっぽけな存在である人間がこれまで理解したことなどはほんのわずかであり，知れば知るほど，わからないことが増えてくる．新しい現象が発見されれば，それを説明するための新しい数学が必要になる．新しい数学が提示されると，純粋理性としての新た

な問題が湧き出し，その解決への挑戦が数学を発展させる．近代，数学は物理学を通して自然から学び，刺激を受け，「自然・物質」を理解するための言葉を用意することで発達してきたが，最近では人間の生み出した「情報」や「データ」に隠れた構造を見出すという新たなアイデア源が出現している．大量のデータをパワフルなコンピューターで解析できる時代となったが，だからこそ，データの集合に隠れた構造を特定し，得られたデータから有用な情報を取り出すことが大切になる．さらに，生命の理解，その先には思考・感情の理解という大きな挑戦がある．もちろん，数学独自の世界の中にも次々に新しい問題が産まれている．

2. 数学の研究

「数学の研究って，いったいどんなことするんですか？」と聞かれると戸惑う．最初は，質問の意味がよく分からなかった．例えば，「科学者」というキーワードで画像検索すると，白衣を着て試験管とビーカーを持った姿が出てくる．仮説を実験観測によって検証する学問としての科学のイメージが一般的であり，実験ならなんとなく想像できるが，抽象性の高い数学理論を作るためには，どのような営みが日々行われているのか，見当がつきにくいのだろうか．まさに，このシリーズのテーマである「数学的感覚」をどのように生み出すのかという問いなのだろう．

「コーヒーを定理に変換しています」という言い古されたジョークはさておき，数学者は，ごくごく普通の数学者は，どのように研究をしているのだろうか．他分野の研究を知らないが，おそらくそれほど大きくは異ならないのではないかと思う．研究者は，どのような研究をしていても，結局は好奇心を原動力に生きている．発想の原点は，専門分野の研究者たちとの情報交換であり，また，思いがけない出会いから生まれることもある．自分の「強み」と言える世界を持ち，その世界を知り尽くすために，感覚を研ぎ澄ますために，具体的な現象を的確に表す例の探索に使う．新しい道具が開発されれば，それをなんとか使えないかとあれこれと試行錯誤する．試験管とビーカーは使わないが，頭の中で，紙と鉛筆で，黒板で，思いつく限りの思考実験と計算をしてみる．数学の対象は目に見えない，手で触ることのできない想像の世界の中に存在する．それをなんとか見たい・触れたいと思う大概の試みは失敗に終わるが，その失敗の中から少しずつ感覚ができあがってくる．想像の世界ではなく実体感が産まれてくる．あたかも直接手に取ったような手触りや色合いまでもが分かるようになる．そのようにあらゆる準備をしていると，思いがけない出会いが舞い降り，それをアイデアに変換することができる．「待ち受ける心」が大切である．上にも書いたように，その舞い降りたアイデアの定式化が，次のステップである．実は，ここが最も苦しい時間である．自ら探り当てた問題意識や方向性が正しいという保証はない．探っても探ってもツルツルと逃げていく絶望感は例えようがない．しかし，その分，暗闇を通り抜けて目の前が急に開けたときの喜びはひとしおである．何かを理解したというこの感動があるからこそ，研究は魅力的であり，やめることができないのだ．

3. 離散幾何解析学，そして材料科学との連携研究

さて，私は幾何学，特に離散幾何解析学を専門としている．修士学生の頃から 20 年くらい調和写像の研究を行い，それを周期的グラフ（結晶格子）上のランダムウォークの研究に応用したことがきっかけで，明治大学の砂田利一先生と一緒に，幾何解析の離散版である離散幾何解析学の研究を開始したのが 2000 年頃である．

幾何解析とは，図形の形に注目して解析的な性質を調べる学問分野である．図形が「リーマン多様体」というすぐれた構造を持っている場合に，偏微分方程式や微分作用素の解の挙動が，図形の形によってどのように異なるかを調べる，もしくは，逆にそのことを利用して，解析的性質から図形の形についての情報を得ることを目的とする研究分野である．例えば，有名な「太鼓の形は聴き分け

られるか？」というカッツの問題では，太鼓の音（周波数）からその太鼓の形を知ることが可能かどうかを問題としている．2000年頃からの砂田先生との共同研究では，物体上の熱の拡散の様子を調べることで，その物体の形を知ることをテーマとしていた．ただし，対象とする「物体」は原子配列の数学モデルである「離散図形」（結晶格子）である．物質のミクロな構造である原子配列が異なると，マクロな現象である熱拡散や電気伝導はどのように変わるか，という問題を，非常に原始的な数学モデルで扱っている．実際の物理現象を解明するような精密なモデルではなく，この問題に影響を与える幾何学的量（概念）は何であるのか，どのようなフレームワークで考えることが自然なのか，を探索するための，おもちゃのようなモデルである．このように，多様体やリーマン計量という有益な構造のない離散図形の上で，幾何解析を展開するためにはどのような構造が適切なのかを考えるのが離散幾何解析学である．

2006年頃から，数学と諸科学分野が出会うことで，これまでとは異なる大きな飛躍が望めるのではないかという期待が世界中で高まり始めた．東北大学においても，数学者と諸科学分野の研究者の出会いの機会が増えてきた．そのような機運の中，2007年に日本科学技術振興機構（JST）に数学領域「数学と諸分野の協働によるブレークスルーの探索」ができ，2008年にはチーム型研究CRESTの募集が始まった．これまでの研究を物質・材料科学に応用することを目指し「離散幾何学から提案する新物質創成・物性発現の解明」研究を提案し，2008年～2013年の期間，数学者―計算科学者―材料科学者によるチームを組んで取り組んでいる．個人研究が主である数学の従来の研究スタイルとは異なり，CRESTは「チーム型」，「課題解決型」の研究を実行する．多くの研究者や研究員が，予め提案した課題を解決するためにそれぞれの得意な役割をもって参加している．我チームには，数学からは東北大学の尾畑伸明氏，宗政昭弘氏，徳山豪氏，赤間陽二氏，関西学院大学の小谷真一氏，京都大学の吉田伸生氏，明治大学の砂田利一氏，名古屋大学の内藤久資氏，そして計算科学から東北大学の川添良幸氏，材料科学からは東北大学の阿尻雅文氏（化学工学），福村裕史氏（物理化学），そこに若手研究者が数多く加わっている．さらに，2010年からは尾畑伸明氏がリーダーの「数学をコアとしたスマートイノベーション」事業が開始し，数学と他分野の連携による新しい領域の開拓（数理材料科学，ITコミュニケーション，数理生命科学，社会環境システム）を目指す研究者が東北大学に集まり賑やかになった．

そして2011年より，原子分子材料科学高等研究機構に「数学ユニット」ができ，材料科学者の世界にどっぷりとつかることになった．原子分子材料科学高等研究機構とは，名前の示すとおり，原子・分子を高度に制御することで革命的な機能を持つ材料を創りだすため，東北大学に2007年に設立された研究所である．材料科学・物理・化学・工学などの異なる背景の研究者が一堂に集結することで，既存のアイデアを超えた材料科学研究を推進することを目的としているが，数学には触媒として分野融合を加速することが期待されている．2012年に，3つのターゲットプロジェクト「力学系理論に基づく非平衡系材料」，「トポロジー機能材料」，「離散幾何解析に基づく階層構造材料」が立ち上がった．

正直，最初は，本来は同じルーツの問題が，数学と物理，さらに材料科学では，捉え方がここまで異なるのかという戸惑いが多かった．しかし，毎日のように何時間もセミナーを繰り返す中，徐々にお互いの言葉や問題意識が（なんとなく）分かるようになり，数学の抽象化の背景にある物理的な感覚に馴染みができてきた．数学の境界をちょっと超えてみると，たくさんの面白い問題が転がっている．既存の数学が，すぐに貢献できるような題材もあるし，まだまだ他分野の研究者にはそれほど知られていない数学的「概念」が適用できそうな現象もある．もっとも刺激的なことは，もちろん，双方にとっての未開拓領域である．

最近の観測技術の進歩は素晴らしい．原子を一つ一つ観測し，制御できる．人間の経験に基づい

た直感とは異なる不思議な現象が発見され，解釈を待っている．複雑な現実の現象の前に，抽象化された数学はあまりにも無力に感じる．しかし，素人である「数学」が材料科学の世界で果たす役割があるとすれば，個々の現象の中に入り込んでいくことではなく，異なる視点で統一的な見方を提供することだろうと思う．隠れている「構造」をなんとか，数学の言葉で明らかにしたい．離散幾何解析学は，離散と連続，ミクロとマクロをつなぐ数学の道具であるので，現代の原子・分子制御から物性につながる研究に対して有益であるかもしれない．まだ，具体的に何ができるか分からない．しかし，何かが少しずつ動きだしている．雑用が終わって夜遅くに研究室に戻ると，材料科学や物理の若手研究者が数学のセミナー室に集まって，位相幾何学の勉強会を開催している．ホモロジーや基本群は，ここ原子分子材料科学高等研究機構では日常語となり，指数定理を勉強したいというリクエストの声も聞こえる．トージョンのあるリーマン幾何を破壊の説明に適用しようとする研究者もいるし，重力理論と物性研究をつなぐ弦理論を物性の実験に使おうとしている研究者もいる．「思いがけない出会い」は待ち受ける心がなければアイデアにならない．待ち受ける心がたくさん産まれているこの機構から，何かが飛び出すことを信じている．

（こたに・もとこ，東北大学大学院理学研究科，原子分子材料科学高等研究機構）

第13回 国家・学問・戦争の諸相

第一次大戦後の科学界

ドイツ人排斥と日本の科学者

岡本 拓司

前回は，第一次大戦前後までに顕著な成果を挙げた日本の医学者2人を取り上げ，彼らの研究の概要とそれらに対する国際的評価の一端を検討した．今回は，第一次大戦中とその後に発生した，国家と科学者の関わりの幾つかの側面を顕にする事態を取り上げて検討する．

13.1 第一次大戦と科学

第一次大戦では，国家による科学技術の組織的な動員が顕著な成果を挙げ，戦後の研究体制にも強い影響を及ぼすこととなった．

戦時下での科学・科学者の活用としては，革命後のフランスが対外戦争の際に兵器や弾薬，食糧の増産のために行ったものや，南北戦争（1861年–1865年）時のアメリカで物理学者のヘンリー（Joseph Henry, 1797–1878）が大統領の技術顧問に就任し，海軍省に科学技術委員会が設置され，また戦時中の1863年に米国科学アカデミーが設立された例などがある[1)]．本連載でも日露戦争時の木村駿吉（1866–1938）による無線電信の開発を取り上げた．

戦時に限らない国家による科学研究の組織化は，1887年のドイツの国立物理工学研究所の設立，1900年のイギリスの国立物理学研究所の設立，1903年のアメリカの国立標準局の設立，1911年のドイツのカイザー・ウィルヘルム協会の設立など，第一次大戦前にも各国で意識的に進められており，日本でも，大正2年（1913年）に，高峰譲吉（1854–1922）が国民科学研究所の設立を提案している（紆余曲折を経て大正6年（1917年）に理化学研究所として実現する）．

戦時下での科学の活用も，国家による科学研究の組織化も，第一次大戦前から存在していたが，大戦による科学技術の動員は，それ以前のものとは，規模においても性質においても異質であった．

第一次大戦は，各国が発達した鉄道網を駆使して兵力を戦場に集中させ，駐退復座機の完備などで速射が可能になった大砲や，機関銃・連発銃によって，互いに退くことなく消耗しあうという戦争であった．塹壕にこもって機関銃と小銃で立ち向かう歩兵は，速射砲から繰り出される弾の直撃には抵抗できないが（大砲の進歩は，十年前の日露戦争では着用されていなかったヘルメットが第一次大戦開始後は各国ですぐに採用されたことから分かる），兵員の消耗分は，総動員体制の下ではすぐに補給される．兵士が残っている塹壕の突破は難しく，戦線は至るところで膠着状態に陥り，大量の兵力，武器，弾薬，食糧，医薬品等が消耗された（統計により具体的な数値はやや異なるが，イギリスやフランスでは，第一次大戦の戦死傷者の

ほうが第二次大戦のそれよりも多い）．参戦した各国において，戦場で使用される多様な物資の補給のための生産力の増強が急務となった．

加えて，染料・医薬品・光学ガラスなどの市場では，第一次大戦前のドイツはほぼ独占状態にあり，開戦によってこれに依存できなくなった国々では，国産化などの措置をとる必要が生じた．飛行機・潜水艦・潜水艦探知・戦車・毒ガスなどの軍事に関わる部分のみならず，産業全般に関して，科学者・技術者の動員と，開発・生産の体制が築かれることとなった．

戦時下で築かれた科学技術振興に関わる組織は，戦後も軍事色を薄めながら存続した．イギリスにおいて政府の科学技術向けの支援を管轄した科学産業研究省（Department of Scientific and Industrial Research, 1916）や，アメリカにおいてロックフェラーやカーネギーなどの私設財団の資金を科学技術振興のために振り分けた米国学術研究会議（National Research Council, 1916. 現在では研究評議会などと訳すが，ここでは学術研究会議の名称を用いる）がそれである[2)]．

科学技術に関わる分野以外でも，大戦終結後は，大戦中に重要性の明らかになった事項全般に，大きな変革がもたらされた．例えば，兵士として戦場に駆り出された男性に代わって，工場労働などに従事して国内の諸産業を支えた女性の貢献は著しく，日本やフランスを除く多くの国で女性参政権が認められた．

より科学技術に関わりの深い分野では，例えば一国内に複数の電力周波数が存在していると，戦時の増産体制には不都合であることが理解され，一部は第二次大戦後に持ち越されながらも，多くの国で周波数統一（を含む電気事業全般の整備）が行われた．西洋諸国と比較すると，日本で現在に至るまで電力周波数の統一が実現していない理由の一端が，第一次大戦での科学技術や産業の動員の程度が大きくなかったことにあると理解できる．第二次大戦に向かう過程では，西洋諸国では，科学技術を含む多くの分野で，第一次大戦の苛烈さの記憶をもとに諸体制の構築が行われたが，これらの国々と日本の状況を比較する際には，最初の世界大戦の経験が両者において異なるという点に注意する必要がある．

13.2 第一次大戦下の科学界における国家間対立

以上は，第一次大戦が主として科学技術に関する制度に及ぼした影響である．これと比較すると日本での認知度はあまり高くないが，大戦中および大戦後には，科学界において，連合国（英仏など．1917年にアメリカも加わる）と同盟国（中央同盟国．ドイツ，オーストリアなど）の間に，深刻な対立が生じていた．今回注目したいのはこの対立である．

戦争に連動して科学者が国家意識を顕にする事態は，まずドイツにおいて生じた．開戦後まもなく，ドイツは，中立国ベルギーへの侵略による戦争開始の責任，同国ルーヴァンにおける市民の殺害や大学図書館蔵書の焼却などの蛮行，その他の国際法違反によって非難を受けることとなったが，1914年10月，科学者を含む93人のドイツの知識人は，「文化世界に訴える」（An die Kulturwelt! Ein Aufruf. 通称は Manifest der 93（「93人の声明」））という声明をドイツの主要紙に10カ国語で発表し，ドイツへの非難は根拠がなく，ドイツ軍は無規律の残忍行為とは無縁であること，ドイツの軍国主義はドイツの文化を守るものであること，ドイツ人はゲーテ，ベートーベン，カントの遺産を受け継ぐ文明国としてこの戦争を戦い抜くことなどを宣言した[3)]．

署名した著名な科学者には，ベーリング（Emil Adolf von Behring, 1854–1917），エールリヒ（Paul Ehrlich, 1854–1915），フィッシャー（Hermann Emil Fischer, 1852–1919），ハーバー（Fritz Haber, 1868–1934），レーナルト（Philipp Lenard, 1862–1947），ネルンスト（Walther Nernst, 1864–1941），オストヴァルト（Wilhelm Ostwald, 1853–1932），プランク（Max Planck, 1858–1947），レントゲン（Wilhelm Conrad Röntgen, 1845–1923），

ウィーン（Wilhelm Wien, 1864–1928），ウィルシュテッター（Richard Martin Willstätter, 1872–1942）などがいた．ただし，内容を知らされずに署名した者もあり，後に一部の者は声明を支持しないことを明らかにした．特にプランクは，1916年までに，オランダの物理学者ローレンツ（Hendrik Antoon Lorentz, 1853–1928）への公開書簡などによって，自身が意図したのはドイツ軍への過度な批判に対する防御のみであって，ドイツ人のあらゆる行為を擁護するという意図はない旨を明らかにしていた[4)]．

ドイツを代表する多くの知識人が署名した「93人の声明」は，しかし，英仏で幅広い反発をひきおこし，イギリスの王立協会やフランス科学アカデミーでは，ドイツ人やオーストリア人を外国人会員から外す動きが生じた[5)]．1915年に，毒ガスの使用や無制限潜水艦作戦が開始されると，対立はさらに激化した．連合国側はドイツを非難したが，ドイツでも，例えばベルリン・アカデミーでは，フランスのアカデミーへの対抗措置として，連合国の市民権をもつ通信会員を除名することなどが検討された[6)]．

連合国の科学者の反ドイツ意識は，万国学士院聯合会（International Association of Academies）の運営をめぐる議論において鮮明に表現されることとなった．聯合会は，1899年にドイツの複数のアカデミーとイギリスの王立協会により設立された各国のアカデミーの連合体である．晩餐会を開く程度の活動が主体であり，具体的な成果は挙げていなかったが，大戦当時にはドイツの4つのアカデミーが所属しており，また聯合会の筆頭アカデミーはベルリン・アカデミーであって，ドイツの世界の学術界における地位を反映していた．1915年，大戦に参戦していなかったアメリカの天文学者，ヘール（George Ellery Hale, 1868–1938）は，筆頭アカデミーを中立国のそれとすることによって大戦中の対立を緩和し，聯合会の存続を図ろうとしたが，ベルリン・アカデミーが永久に筆頭アカデミーの座につかないことを要求するフランスの主張の前に，この企図は潰えた[7)]．

次いでヘールは，連合国，特にフランスの科学者の意図を汲んで，聯合会を解散して新たな組織を設けることを想定したが，解散には参加アカデミーの三分の二の賛成が必要であり，中立国（オランダや北欧諸国など）にもドイツの影響が強い状況の下では実現は困難なことが予想された．連合国側が一斉に脱退するという選択肢もあり得たが，ドイツと中立国の大半が残留すれば，むしろ同盟国側に連合国側が排斥されたという印象を与えることになる．敵国の指導者への非難を敵国の国民への反感の表明としたくはないウィルソン大統領（Woodrow Wilson, 1856–1924）の意向もあり，また学術に国家間の対立を持ち込むべきではないという常識的な見解を抱く各国の学界の関係者の躊躇もあって，ドイツ排斥を鮮明にした新組織の準備は容易には進まなかった．

アメリカが1917年4月に参戦すると，事態は変化の兆しを見せるようになった．軍事に関わる科学技術関連の情報を英米仏の間で効率的に共有するための組織（Research Information Committee，ついでResearch Information Service）が米国陸軍省に設けられるなどの動きがあり，これが連合国主体の国際的な学術団体を設立するという構想に有利に働いたためである．

大戦がいまだ終結をみない1918年10月，王立協会は，同盟国を除く各国のアカデミーの代表者をロンドンに招いて会議を開催し（議長はJ.J.トムソン（Joseph John Thomson, 1856–1940）），同盟国と交戦中の各国が，現存する学術関連の国際連合体から脱して新たな組織を設けることを決定した．新たな組織の中核は，各国の学術研究会議（National Research Councils）の集合体（International Research Council，万国学術研究会議）であるとされ，各国の学術研究会議は，アメリカにおける科学アカデミーと学術研究会議の関係がそうであるように，ロンドンの会議に招かれた各国のアカデミーを母体として設けられることとなった[8)]．

ロンドン会議の一カ月のち，ドイツ軍と連合国軍は休戦協定を結び，翌年1月にはパリ講和会議

が開催された．さらに6月にはヴェルサイユ条約が調印され，第一次大戦は終結した．フランスやベルギーの学者の間には，親ドイツ色が強い国々（オランダやスウェーデンなど）への懸念も依然として存在したが，万国学術研究会議にはそれらを含めた中立国も招かれ，1919年7月にはベルギーにおいて総会が開催された．しかし，ここで採択された定款（statutes）は，譲歩は中立国に対してまでであることを明らかにしていた．敗戦国の研究者には，会議への加入や，会議の傘下にある団体の学会等への参加は許されていなかったのである[9]．こうして，特定の国々の排除を明言するという特異な性格をもつ国際学術組織が，最初の世界大戦の産物として誕生することとなった．

13.3 抵抗するドイツ：プランクの奮戦

ドイツを学界から排除する動きは，「93人の声明」などを根拠とする，ドイツの知識人への倫理的な非難によって正当化されることが多かった[10]．しかし，例えばウェーバー（Max Weber, 1864–1920）は，戦後に勝利者が自分たちは倫理的に正しかったために勝利したと主張する様子を，A女からB女に心変わりした男がA女の欠点をあげつらうことで自身の移り気を正統化する姿になぞらえ，騎士道精神に反する，品位を欠いた独善であると表現した．敗北という事実には堪えなければならないが，それ以上の屈辱に甘んずる必要はないという反論である[11]．妻公認の年若い愛人がいる[12]という（羨ましいようなそうでもないような）状態にあったウェーバーならではの洞察であり，同時にドイツの知識人の自負を窺わせる．

高潔な人格で知られるプランクも倫理的な非難は受け付けなかった．スウェーデンのアレニウス（Svante August Arrhenius, 1859–1927）は，1919年，「93人の声明」の署名者たちに，撤回を表明して戦勝国からの非難に対応するよう勧めたが，このときプランクは，戦時中の1916年の自分の例には従わないよう同国人の同僚に忠告した．敗戦後はむしろ毅然たる態度をとろうとしたようにも，あるいは，講和条約が領土割譲や多額（「天文学的」）の賠償金支払いを課する以上，これを越える譲歩は必要ないと考えたようにも思われる[13]．

戦時中には，プランクは，ベルリン・アカデミーが他国のアカデミーに敵対的な決定を行うのを阻止するなど，国際協力の可能性を保持するために尽力していた[14]．敗戦に直面すると，科学本来の国際的な性格がドイツに対してもつ意味はより重くなった．休戦直後の1918年11月14日，プランクはベルリン・アカデミーにおいて，国内外のドイツの敵が奪い得ないものは科学界におけるドイツの地位であり，これを守ることがアカデミーの使命であると述べ[15]，また1年後には，新聞紙上で，ドイツが文明国であることを保証するのは科学であると主張した[16]．

実際のところ，大戦前後，ドイツの科学界における地位は，さらに向上しつつあった．例えばノーベル賞受賞者を見ると，物理学賞は，1914年の賞がラウエ（独，Max von Laue, 1879–1960），15年はブラッグ父子（英，William Henry Bragg, 1862–1942; William Lawrence Bragg, 1890–1971），17年はバークラ（英，Charles Glover Barkla, 1877–1944），18年はプランク（独，決定は19年），19年はシュタルク（独）に与えられ（16年は受賞者なし），化学賞は，14年の賞はリチャーズ（米，Theodore William Richards, 1868–1928），15年はウィルシュテッター（独），18年はハーバー（独）に与えられた（16年，17年，19年は受賞者なし）．連合国との均衡が配慮されたようにも思われるが，ドイツ人受賞者は多い．その中には「93人の声明」に署名したドイツ人が3名含まれており，さらにそのうちのハーバーは，戦時中の毒ガス開発により，戦争犯罪人として起訴されることこそなかったものの，強い国際的な非難を浴びていた人物であった．

ノーベル物理学賞・化学賞の選考機関であるスウェーデン王立科学アカデミーは，ハーバーへの授賞という親独姿勢を首相のブランティング（Karl Hjalmar Branting, 1860–1925）に指弾され，またフランスでも同様の報道が現れた．戦時下で授

賞が行えなかったため，上述の受賞者は1920年に特別に実施された授賞式に招待されたが，同国人たちと反独意識を共有するリチャーズとブラッグ父子は，これに出席しなかった．一方ドイツでは，同胞の受賞は知的世界での祖国の勝利を示していると報じられた[17]．

プランクは，大戦後の厳しい経済状況の下，科学研究を維持するための資金の分配に当たる幾つかの委員会（学術扶助会（Notgemeinschaft der deutschen Wissenschaft）の物理学委員会，電気物理学委員会（Elektrophysik-Ausschuss）など）において重要な地位を占めており，進行中の研究に関しても，ドイツの地位を維持向上させるための支援を行った．つまり，新理論誕生前夜の世界の物理学界全体が必要とし，かつドイツの特長が生かされる分野，具体的には，理論研究，とりわけ量子論の研究に，意識的に援助を集中させた[18]．量子力学は，その成果として，ドイツの物理学者の大きな貢献の下で誕生したが，この事実は，プランクを含むドイツの科学者たちが目指した通り，ドイツの科学は世界との交流がなくとも自律的に発展でき，むしろドイツ排斥で損害を被るのはこれを行った側であることを示した[19]．

1925年になると，ローレンツの主導により，旧同盟国排除条項の削除が万国学術研究会議の総会に提案された．これは否決されたが，同年にロカルノ条約が結ばれ，ドイツの国際連盟加入が認められると，翌年には排除条項が削除され，ドイツとオーストリアには万国学術研究会議への参加が申し入れられた．ドイツ政府も参加を促したが，今度はドイツの科学者たちが謝罪を要求するなどして，これを拒否した[20]．1931年には万国学術研究会議は国際学術連合会議（International Council of Scientific Unions）に改組されたが，この時点でもドイツは参加せず，両陣営の対立は，第二次大戦後まで解消しなかった[21]．

個人としては，しかし，プランクも，同胞の科学者たちが差別的な待遇を受けていないかどうかに配慮しながら，1927年にはコモ会議や第5回ソルヴェー会議に参加した[22]．不参加によって悪意があるかのように疑われることを懼れたのである．

また，知的世界の権威によって，ドイツの地位を，国家の努力とは別の形で支えているという意識のあった科学者たちは，科学における国際交流を重視して，ときにはワイマール共和国の政策に反する振舞いにも出た．同国はソ連に対する警戒を容易に解かなかったが，プランクらは，ソヴィエト連邦のロシア科学アカデミー創立200周年記念祭（1925年）への招待に応じ，自国政府の方針に反して，ソ連の国際社会への登場を推し進める役割を果たすこととなった．

13.4 日本とドイツの関わり：三国干渉まで

第一次大戦では日本は戦勝国であり，帝国学士院から代表を送って万国学術研究会議にも参加し，ドイツ人排斥も承認している．しかし，よく知られている通り，日本の科学界にはドイツの影響が色濃く，日本国内では幾つかの反動もあった．

日本の科学界へのドイツの影響を確認するために，明治維新からの状況を振り返ってみよう．

日本の学術へのドイツの影響は，明治維新直後は，特定の分野に限られていた．よく知られているのは，明治2年（1869年）に医学においてドイツ流が採用されたことである．これは，ドイツ医学は優れているとするフルベッキ（Guido Herman Fridolin Verbeck, 1830–1898）の助言や，立憲君主国のドイツに範をとるべきであるとする，いずれも佐賀出身でフルベッキに師事した副島種臣（1828–1905）と大隈重信（1838–1922）の見解が採用された結果であった．

医学以外の分野で高等教育を目指す者は，例えば大学南校—（東京）開成学校では外国語として英仏独語のいずれかを学んだが，明治6年（1873年），財政難で教育すべき外国語を一つに絞る必要が生じた際には，英語が選択された．ドイツ語を学んだ者のために鉱山学科，ついで化学科が設けられたが，選択者が少なく廃止されている[23]．このほか，陸軍では，丁普戦争（1864年），普墺戦争（1866年），普仏戦争（1870年–1871年）に勝

利したプロイセンに倣って参謀本部が採用されるなど，ドイツ方式が主流となり，またこれは，地図漏洩事件（明治14年（1881年））にみられる川上冬崖（1828–1828）の失脚のように，旧幕府のフランス式の排除も意味していた．なお，陸軍はドイツ式の採用ののち，フランス式の機器類を徐々にドイツ式に取り替えていったが，それらのうち測量機器は，明治23年（1890年）になって高等中学校に譲渡され，開始直後の工科等の生徒向けの必修の測量の実習に役立てられた[24]．

ドイツ語学習，ドイツ偏重が一気に加速したのは，「明治十四年の政変」(1881年) 後である．憲法制定や議会開設をめぐって，今度はイギリス式の採用を主張した大隈が失脚し，政府の方針はドイツ式の立憲君主制の採用に決したと理解された．同年には，政党内閣制を支持する英学，主権在民説の仏学を撲滅するとして独逸学協会が設立され，ドイツ語学習熱が高まった[25]．英法を学び（他の有力な選択肢は仏法であった)，のちに法律全体のドイツ式採用に遭遇した平沼騏一郎（1867–1952）は，憲法制定に際してオーストリアでスタイン（Lorenz von Stein, 1815–1890）に学んだ伊藤博文（1841–1901）を評して，実際は講義を理解しておらず，単に翻訳したと評したが[26]，自身は独法を知らなければ馬鹿にされると考え，文法を一晩で暗記し，さらにドイツ語の教師を雇って2, 3カ月で法学書も読めるようになり，ドイツ流の講義もできるようになったという[27]．

明治14年以降も，しかし，ドイツの影響があらゆる場面ですぐに強まったわけではなかった．ドイツ式といわれる帝国大学（明治19年（1886年）設立）は，工科大学（と後に農科大学）を含む点でドイツの大学とは異なっており，また文部大臣の森有礼（1847–1889）は，明治19年11月には，第一高等中学校（一中）に独逸学協会学校予備科を終えて入学する生徒のために規則を整備することを命じておきながら，翌月には一中の第一外国語は英語とし，明治24年（1891年）以降の入学試験は英語のみとすることを定めた（実現はしなかった）[28]．

大日本帝国憲法が発布され（明治22年（1889年)），日本全体の親独感情も高まっていった頃，これに冷や水を浴びせかける出来事が生じた．日清戦争（1894年–1895年）に勝利して遼東半島を得た日本に，ロシア・フランス・ドイツが同半島の還付を申し入れたのである（三国干渉）．東アジアに権益をもつロシアと，同国と同盟関係にあるフランスについては，不愉快ではあっても事情は理解できたが，ドイツの行動は不可解とされ，明治31年（1898年）に同国が清国から膠洲湾を租借するに至ると，魂胆が見えたと評された．

13.5 ドイツ排斥への対応

第一次大戦が発生し，日本が青島や南洋諸島でドイツ軍を破った際も，ドイツ語熱が高まる以前に教育を受けた世代は，三国干渉を想起して快哉を叫んだ．親英米派として知られる外交官の石井菊次郎（1866–1945）は，後年，日本が青島を入手したのを，三国干渉に対する「覿面の罰」,「臥薪嘗胆の帳消し」と評した[29]．師のコッホ（1843–1910）を慕う情の篤い北里柴三郎（1853–1931）も，このときは愛国者ぶりを発揮して，大正5年（1916年)，戦乱のヨーロッパに代わって世界の学術を担うのは日本とアメリカであるから，今日は「日本医学の根蒂を強固にし，覇を世界に唱ふる」ためには絶好の機会であると主張した[30]．

大正7年（1918年）にロンドンで開かれた，万国学術研究会議発足に向けた王立協会主催の会議には，親英的な物理学者の田中舘愛橘（1856–1952）と化学者の櫻井錠二（1858–1939）が帝国学士院から派遣され，同盟国を除く国々によって新たに国際的な団体を結成するという決議に賛成し，また翌月にパリで行われた分科会設置に関する会議にも参加して帰国した．これを受け，大正9年（1920年）に日本でも学術研究会議官制が発表され，会員が任命された[31]．

学術研究会議の創立総会は，大正9年12月10日・11日に行われた．この時期までには，医学界を中心に，留学を経て親独感情を抱く者も多く，独

墺留学再開の動きや，連合国側の不公正な扱いへの憤りも目だっていた．櫻井や田中舘は「英仏米等の学者の尻馬に乗っ」[32]たと評されるほどであり，総会は紛糾した．医学者の長與又郎（1878–1941）は，学術研究会議が，独墺の排除を停止し，従前通り共同して学術研究を進めることを希望する旨を決議し，これを万国学術研究会議に伝えるよう提案したが，化学者の真島利行（1874–1962）などの賛成意見が続いた．糾弾にあったかたちの櫻井は激昂し，議題として取り上げないよう議長の古市公威（1854–1934）にはたらきかけたが，医学者の北島多一（1870–1956）が緊急動議として出すことを提案し，可決された[33]．

休憩時間に，長與が櫻井に，なぜこの問題を避けるのかと尋ねると，櫻井は，日本の学術への貢献（の小ささ）に鑑みてこのような議論はできないと答えた．対して長與は，日本の学問は大戦後もドイツに負うところが大きいと述べ，英仏を怖れて形だけ排斥に参加するのは正しい振舞いではないと説いた．櫻井はその場を立ち去った．

学術研究会議総会での決議は，最終的には，「本学術研究会議は万国学術研究会議に向って，文明諸国の普く参加せんことを希望す」という穏和なものとなったが，長與は一応納得した．また，大正10年（1921年）に入ると，学術研究会議での提議に続いて，病理学会等では個別に独墺との提携が決議された[34]．

大戦後，ドイツ語圏への留学が再開できると考えていた日本の医学生が入国を拒否されるといった問題が生じており，長與らは解決策を講ずる必要もあって，独墺との協力関係の再構築に腐心していたようである．自身も学んだフライブルクのアショフ（Ludwig Aschoff, 1866–1942）に対しては，やはり彼に指導を仰いだ者30人以上とともに，34,300マルクの見舞金を送っている[35]．困窮する独墺への送金は組織的にも行われており，大正9年には独墺医家慰問会が設けられ，584人による寄附は2万355円に達した．翌年，うち2万円が，日本人留学生の数に応じて，ドイツ22大学，オーストリア3大学の医学部に分配された[36]．

日本側の努力の甲斐もあって，ドイツへの留学も再開されるようになった．特にアショフは日本人学生を厚遇し[37]，大正13年（1924年）には元留学生の招きに応じて来日した．アショフは，1926年のノーベル生理学・医学賞に，人工癌の発生により山極勝三郎（1863–1930）を推薦しているが，これは大正13年の訪日で見聞した情報に基づいている．

ドイツに資金援助を行ったのは医学界のみではなかった．むしろ，大正9年に開始した，「製薬王」星一（1873–1951）が後藤新平（1857–1929）の勧めによって学術扶助会に対して行い，原子に関する研究を支援したもの（「星基金」）のほうが著名であろう．星はドイツに招待され，また星基金の管理にあたったハーバーは，大正13年に星の招きで来日した[38]．来日時には，ハーバーは，自身の研究室で学んだことのある元留学生，田丸節郎（1879–1944）の自宅も訪問している．日本との関係の強いハーバーは，1930年，国際化学連合（International Chemical Union）において日本の代表がドイツの提案を支持しなかった際，ドイツの外務省に対し，以後，化学分野の日本人留学生のドイツの大学への受け入れが困難になる可能性がある旨，在東京の大使館を通じて関係者に伝えるよう提案している[39]．このような圧力が日本人に効くことを理解していたのである．

大戦後，連合国の科学者たちが，ドイツが中立国に対して強い影響力を行使するのを懼れたのは既に見た通りであるが，連合国側の戦勝国である日本でも，むしろドイツを排斥する英米仏を批判する声は高かった．外交や戦争によって国家間に優劣がついたとしても，学術上の上下関係はそれとは独立して存続し，優位にある国家の威信の保持に資する．三国干渉や青島・南洋諸島での戦闘に見られるとおり，文化的な交流が外交上の対立や戦争を防ぐことは期待しにくいが，学問は，戦争や外交といった基準とは別の，国家間の優劣を測る基準として機能する．第一次大戦以後，日中戦争（1937年–1945年）の中国側の作戦はドイツの

軍人が作り，日独防共協定（1936 年）が結ばれると独ソ不可侵条約（1939 年）で裏切り，次いでソ連も含めた同盟を構想して日独伊三国同盟（1940 年）が結ばれると今度はドイツがソ連に侵攻する（1941 年）といったドイツ側の背信行為に近いふるまいが続くが，文化面でドイツを慕う感情が日本から消えることはなかった．

大戦後のドイツの科学上の地位を象徴する人物の 1 人がアインシュタイン（Albert Einstein, 1879–1955）であったが，1920 年代に入ると，ドイツの社会情勢は，反戦的なユダヤ人であった彼が身の危険を感ずるほどに急進化していく．次回はこのアインシュタインの来日（大正 11 年（1922 年））の際の日本の科学者たちの動向を検討する．

参考文献

1) 廣重徹,『科学の社会史（上）』, 岩波書店, 2002 年, 54–92 ページ.
2) 廣重, 前掲[1),『科学の社会史（上）』, 94–100 ページ.
3) ジョン・L. ハイルブロン, 村岡晋一訳,『マックス・プランクの生涯』, 法政大学出版局, 2000 年, 74–75 ページ.
4) ハイルブロン, 前掲[3),『マックス・プランクの生涯』, 81–83 ページ.
5) Daniel J. Kevles, *The Physicists* (Cambridge, Massachusetts and London, England: Harvard University Press, 1987), p.141.
6) ハイルブロン, 前掲[3),『マックス・プランクの生涯』, 84 ページ.
7) Daniel J. Kevles, "'Into Hostile Political Camps': The Reorganization of International Science in World War I," *Isis*, **62** (1970), pp.47–60.
8) Kevles, *op. cit.*, 7), "'Into Hostile Political Camps'," pp.55–56.
9) Frank Greenaway, *Science International: A History of the International Council of Scientific Unions* (Cambridge: Cambridge University Press, 1996), pp.24–25.
10) ハイルブロン, 前掲[3),『マックス・プランクの生涯』, 106 ページ.
11) マックス・ヴェーバー, 脇圭平訳,『職業としての政治』, 岩波文庫, 1980 年, 83 ページ.
12) クリスタ・クリューガー, 徳永惇・加藤精司・八木橋貢訳,『マックス・ウェーバーと妻マリアンネ』, 新曜社, 2007 年.
13) ハイルブロン, 前掲[3),『マックス・プランクの生涯』, 106–108 ページ.
14) ハイルブロン, 前掲[3),『マックス・プランクの生涯』, 84–85 ページ.
15) Paul Forman, "Scientific Internationalism and the Weimar Physicists: The Ideology and Its Manipulation in Germany after World War I," *Isis*, **64** (1973), pp.150–180, p.163.
16) ハイルブロン, 前掲[3),『マックス・プランクの生涯』, 95 ページ.
17) Robert Marc Friedman, *The Politics of Excellence: Behind the Nobel Prize in Science* (New York: Time Books, Henry Holt, 2001), 93–115.
18) ハイルブロン, 前掲[3),『マックス・プランクの生涯』, 96–106 ページ.
19) ハイルブロン, 前掲[3),『マックス・プランクの生涯』, 114–115 ページ.
20) ハイルブロン, 前掲[3),『マックス・プランクの生涯』, 108–109 ページ.
21) Kevles, *op. cit.*, 7), 'Into Hostile Political Camps', p.60.
22) Forman, *op. cit.*, 15), "Scientific Internationalism," pp.179–180; ハイルブロン, 前掲[3),『マックス・プランクの生涯』, 112–115 ページ.
23) 東京大学百年史編集委員会,『東京大学百年史　通史一』, 東京大学, 1984 年, 303–306 ページ.
24) Takuji Okamoto, "The First Higher School's Instruments for Science and Engineering Education," *Historia Scientiarum*, **20-3** (2011), pp.196–211.
25) 新宮讓治,『獨逸学協会学校の研究』, 校倉書房, 2007 年.
26) 平沼騏一郎回顧録編纂委員会編纂・発行『平沼騏一郎回顧録』, 1955 年, 25 ページ.
27) 平沼騏一郎回顧録編纂委員会, 前掲[26),『平沼騏一郎回顧録』, 45 ページ.
28) 第一高等学校,『第一高等学校六十年史』, 1939 年.
29) 鹿島平和研究所編『石井菊次郎遺稿　外交随想』, 鹿島研究所出版会, 1967 年, 191–192 ページ.
30) 北里柴三郎,「日本医学の将来」,『日本医事週報』, **1083** 号, 1916 年 1 月 1 日, 3 ページ.
31) 九和会編輯・発行,『思出の数々　男爵櫻井錠二遺稿』, 1940 年, 26–36 ページ.
32) 小高健編,『長與又郎日記—上—』, 学会出版センター, 2001 年, 163 ページ.
33) 小高, 前掲[32),『長與又郎日記』, 164–167 ページ.
34) 小高, 前掲[32),『長與又郎日記』, 168–170 ページ.
35) 小高, 前掲[32),『長與又郎日記』, 161 ページ.
36)「独墺医家慰問会の送金」,『医事新聞』, **1074** 号, 1921 年 7 月 25 日, 902–903 ページ.
37) 神谷甫彦,「独逸学者の対日感情」,『医海時報』, 1415 号, 1921 年 8 月 6 日, 1282 ページ.
38) 宮田親平,『毒ガス開発の父　ハーバー　愛国心を裏切られた科学者』, 朝日新聞出版, 2007 年.
39) Forman, *op. cit.*, 15), "Scientific Internationalism," pp.168–169.

（おかもと・たくじ，東京大学大学院総合文化研究科）

複素解析1

複素積分と定積分の計算

海老原 円・太田 雅人

6.1 コーシーの積分定理と定積分

今回は複素積分を利用して定積分を計算する典型的な問題をいくつか取り上げる．

以下，複素平面 $\mathbb{C}$ において，a を始点，b を終点とする線分を $[a,b]$ で表す．また，$r>0$ に対して，$z=re^{i\theta}$ $(0\leq\theta\leq\pi)$ で表される半円弧を Γ_r で表すことにする．

まずは，連載第4回で取り上げた問題を複素積分を利用して解いてみたい．

> **問題 6.1** （東京大学大学院理学系研究科化学専攻，平成21年度：一部抜粋） 次の定積分を計算せよ．
>
> $$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

解答例 $0<\varepsilon<R$ とし，図 6.1 のような閉じた積分路 $C_{\varepsilon,R}$ 上の複素積分 $\displaystyle\int_{C_{\varepsilon,R}}\frac{e^{iz}}{z}\,dz$ を利用して解くことにする（積分路の取り方に関しては，解答例の後のコメントを参照のこと）．

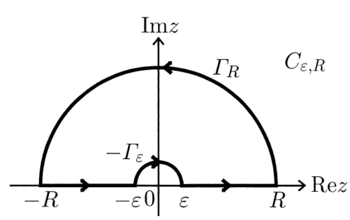


図 6.1

積分路 $C_{\varepsilon,R}$ は4つの曲線（線分も曲線と考える）$\Gamma_R,[-R,-\varepsilon],-\Gamma_\varepsilon,[\varepsilon,R]$ からなる．ここで，$-\Gamma_\varepsilon$ は Γ_ε の向きを逆にした曲線を表す．複素関数 $\dfrac{e^{iz}}{z}$ は複素平面から原点を除いた領域 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ で正則であり，閉曲線 $C_{\varepsilon,R}$ で囲まれる閉領域は $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ に含まれるので，**コーシーの積分定理**より

$$\begin{aligned}0&=\int_{C_{\varepsilon,R}}\frac{e^{iz}}{z}\,dz\\&=\int_{\Gamma_R}\frac{e^{iz}}{z}\,dz+\int_{[-R,-\varepsilon]}\frac{e^{iz}}{z}\,dz-\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{e^{iz}}{z}\,dz+\int_{[\varepsilon,R]}\frac{e^{iz}}{z}\,dz \qquad (6.1)\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで，実数 x に対して，**オイラーの公式**より，$\dfrac{e^{ix}}{x} = \dfrac{\cos x}{x} + i\,\dfrac{\sin x}{x}$ であり，この実部は奇関数，虚部は偶関数だから

$$\int_{[-R,-\varepsilon]} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int_{[\varepsilon,R]} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = 2i\int_{\varepsilon}^{R} \frac{\sin x}{x}\,dx \tag{6.2}$$

となる．また，上側の半円弧 Γ_R においては，$z = Re^{i\theta}$ より $\dfrac{dz}{d\theta} = iRe^{i\theta}$ だから

$$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = \int_0^{\pi} \frac{e^{iRe^{i\theta}}}{Re^{i\theta}}\,iRe^{i\theta}\,d\theta = i\int_0^{\pi} e^{iR\cos\theta - R\sin\theta}\,d\theta$$

であり，これから

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz\right| &\le \int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta}\,d\theta = 2\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\theta}\,d\theta \\ &\le 2\int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2R}{\pi}\theta}\,d\theta = \frac{\pi}{R}(1-e^{-R})\end{aligned} \tag{6.3}$$

と評価できる．ここで，$\sin\theta$ が $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ に関して対称であることと不等式

$$\sin\theta \ge \frac{2}{\pi}\theta \quad \left(0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right) \tag{6.4}$$

を用いた．(6.3) において $R \to \infty$ とすれば

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = 0 \tag{6.5}$$

を得る．次に，下側の半円弧 Γ_ε 上の積分は

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{z}\,dz + \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{e^{iz}-1}{z}\,dz$$

と分解して考える．まず，すべての $\varepsilon > 0$ に対して

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{z}\,dz = \int_0^{\pi} \frac{1}{\varepsilon e^{i\theta}}\,i\varepsilon e^{i\theta}\,d\theta = \int_0^{\pi} i\,d\theta = \pi i$$

である．一方，$g(z) = \dfrac{e^{iz}-1}{z}$ とおくと，e^{iz} の**テイラー展開**より，$g(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} z^{n-1}$ であり，このベキ級数の収束半径は ∞ だから，関数 $g(z)$ は複素平面全体 $\mathbb{C}$ で正則である．特に，$|g(z)|$ は有界閉集合 $\{z \in \mathbb{C} : |z| \le 1\}$ 上で連続だから，その最大値を M とおくと，$0 < \varepsilon \le 1$ に対して

$$\left|\int_{\Gamma_\varepsilon} g(z)\,dz\right| = \left|\int_0^{\pi} g(\varepsilon e^{i\theta}) i\varepsilon e^{i\theta}\,d\theta\right| \le \varepsilon\int_0^{\pi} |g(\varepsilon e^{i\theta})|\,d\theta \le M\pi\varepsilon$$

が成り立つ．よって

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = \pi i \tag{6.6}$$

である．最終的に，以上の結果 (6.1), (6.2), (6.5), (6.6) より

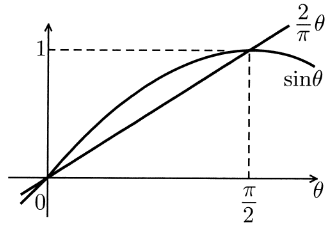


図 6.2

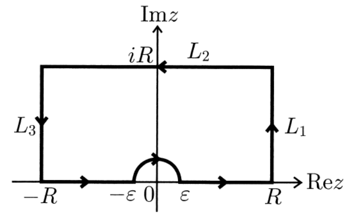


図 6.3

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{2i}\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{e^{iz}}{z}\,dz - \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2i}\int_{\Gamma_R}\frac{e^{iz}}{z}\,dz = \frac{\pi}{2}$$

を得る． **解答終わり**

連載第 4 回では，実 2 変数の微積分，特に，累次積分の順序交換を用いたが，その解法とコーシーの積分定理を用いた上の計算方法を比較してみると，後者のほうがより簡明であるといえるだろう．

なお，問題 6.1 の解答例で用いた積分路 $C_{\varepsilon,R}$ の取り方は多くの教科書に載っている《標準的な》ものであるが，上側の半円弧 Γ_R 上の積分の評価 (6.3) で，不等式 (6.4)（図 6.2 参照）を用いるところが少し技術的である．積分路を図 6.3 のように取れば，この部分はより簡単に評価することができる．

実際，L_1, L_2, L_3 を図 6.3 の線分とすると，L_1 は $z = R + it$ $(0 \le t \le R)$ と表され，$|R + it| \ge R$ $(0 \le t \le R)$ だから

$$\left|\int_{L_1}\frac{e^{iz}}{z}\,dz\right| = \left|\int_0^R \frac{e^{iR-t}}{R+it}\,i\,dt\right| \le \int_0^R \frac{e^{-t}}{|R+it|}\,dt$$
$$\le \frac{1}{R}\int_0^R e^{-t}\,dt = \frac{1}{R}(1-e^{-R}) \to 0 \quad (R\to\infty).$$

L_3 上の積分も同様に評価される．また, L_2 の逆向きの線分は $z = t + iR$ $(-R \le t \le R)$ と表され，$|t + iR| \ge R$ $(-R \le t \le R)$ だから

$$\left|\int_{L_2}\frac{e^{iz}}{z}\,dz\right| = \left|\int_{-R}^R \frac{e^{it-R}}{t+iR}\,dt\right| \le \int_{-R}^R \frac{e^{-R}}{|t+iR|}\,dt$$
$$\le \int_{-R}^R \frac{e^{-R}}{R}\,dt = 2e^{-R} \to 0 \quad (R\to\infty)$$

となり，$k = 1, 2, 3$ に対して，$\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{L_k}\frac{e^{iz}}{z}\,dz = 0$ が示された．

定積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ を計算する際に，図 6.3 のような積分路を選ぶことの利点は，参考文献 1) p.183 の注意でも述べられているが，図 6.1 の積分路を採用している教科書が多いようである（もちろん，すべてではない．例えば，文献 2) p.251，例 5 では，図 6.3 のような積分路が採用されている）．

さて，問題 6.1 と同じような問題をもう 1 つ考えよう．

問題 6.2 （京都大学大学院情報学研究科システム科学専攻，平成 24 年度：一部改題） 複素関数 $f(z)=\dfrac{1-e^{iz}}{z^2}$ を考える．以下の設問に答えよ．

(1) $f(z)$ を $z=0$ のまわりでローラン展開せよ．

(2) Γ_ε を $z=\varepsilon e^{i\theta}$ $(0\le\theta\le\pi)$ で定義される半円弧の積分路とする（ε は正の実数）．このとき $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon} f(z)\,dz$ を計算せよ．

(3) $f(z)$ についての複素積分を利用して，定積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$ の値を求めよ．

解答例 (1) e^{iz} のテイラー展開より，$z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ に対して

$$f(z)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n!}z^{n-2}=-\frac{i}{z}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^k}{(k+2)!}z^k$$

が成り立ち，これが求めるローラン展開である．

(2) 上式の右辺第 2 項を $g(z)$ とおくと，このベキ級数の収束半径は ∞ だから，$g(z)$ は $\mathbb{C}$ で正則である．このとき，(6.6) を示したときと同様に，$\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\Gamma_\varepsilon} g(z)\,dz=0$ であり，

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\Gamma_\varepsilon} f(z)\,dz=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{-i}{z}\,dz+\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\Gamma_\varepsilon} g(z)\,dz=\pi$$

を得る．

(3) $0<\varepsilon<R$ とし，$C_{\varepsilon,R}$ を図 6.1 の閉曲線とし，問題 6.1 の解答例と同じ記号を用いる．$f(z)$ は $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ で正則だから，コーシーの積分定理より

$$0=\int_{C_{\varepsilon,R}} f(z)\,dz=\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz+\int_{[-R,-\varepsilon]} f(z)\,dz-\int_{\Gamma_\varepsilon} f(z)\,dz+\int_{[\varepsilon,R]} f(z)\,dz$$

が成り立つ．ここで，実数 x に対して，$f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^2}-i\dfrac{\sin x}{x^2}$ であり，この実部は偶関数，虚部は奇関数だから

$$\int_{[-R,-\varepsilon]} f(z)\,dz+\int_{[\varepsilon,R]} f(z)\,dz=2\int_\varepsilon^R\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx.$$

次に，$z=x+iy\in\Gamma_R$ $(x,y\in\mathbb{R})$ に対して，$y\ge 0$ だから

$$|f(z)|\le\frac{1+|e^{iz}|}{|z|^2}=\frac{1+e^{-y}}{|z|^2}\le\frac{2}{R^2}$$

と評価される．よって

$$\left|\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz\right|\le\int_0^\pi\frac{2}{R^2}R\,dt=\frac{2\pi}{R}$$

であり，$\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz=0$ を得る．従って，以上の結果と (2) の結果と合わせて

$$\int_0^\infty\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{2}\int_{\Gamma_\varepsilon} f(z)\,dz-\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2}\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz=\frac{\pi}{2}$$

を得る．　　　　**解答終わり**

問題 6.1 と問題 6.2 の解答ほぼ同様であるが，連載第 4 回にも書いたように，もともと，広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ と $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$ は部分積分によって結びついていることに注意しておこう．

この節では，積分路で囲まれる閉領域のまわりで被積分関数が正則である場合に，**コーシーの積分定理**を利用して定積分を計算する問題を考えたが，次の節では，積分路で囲まれる領域内に被積分関数の特異点が存在する場合に，**留数定理**を利用して定積分を計算する問題を考えよう．

6.2 留数定理と定積分

この節では，**留数定理**または**コーシーの積分公式**を利用して定積分を計算する典型的な問題を取り上げる．

問題 6.3 （北海道大学大学院工学院応用物理学専攻，平成 24 年度） 実関数の積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1}\,dx \tag{6.7}$$

を複素積分により計算する．この計算に関する以下の問いに答えなさい．

(1) z を複素数とし，積分

$$\oint_{C_R} \frac{1}{z^4+1}\,dz \tag{6.8}$$

を考える．ここで，C_R は複素平面上の原点を中心とした半径 R の半円上を左回りに回る積分路（図 6.4）である．この被積分関数の特異点を全て求めなさい．

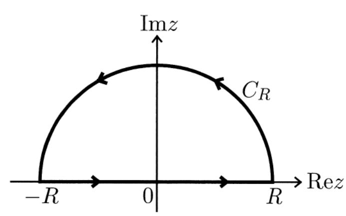


図 6.4

(2) (1) で求めたそれぞれの特異点は何位の極であるかを答えなさい．

(3) (1) で求めたそれぞれの特異点の留数を求めなさい．

(4) (6.8) 式の円周上の積分部分は $R\to\infty$ においてゼロとなることを証明し

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1}\,dx = \lim_{R\to\infty}\oint_{C_R} \frac{1}{z^4+1}\,dz \tag{6.9}$$

となることを示しなさい．

(5) (6.9) 式と留数定理を用いて (6.7) 式の積分値を求めなさい．

解答例 (1) $z^4+1=0$ を満たす複素数 z は

$$e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}},\quad e^{i\frac{3\pi}{4}} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}},\quad e^{-i\frac{3\pi}{4}} = \frac{-1-i}{\sqrt{2}},\quad e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

の 4 点である．よって，被積分関数 $\dfrac{1}{z^4+1}$ は複素平面からこの 4 点を除いた領域で正則であり，特異点はこの 4 点である．

(2) (1) で求めた 4 点を順に a_1, a_2, a_3, a_4 とおく．このとき，$z^4+1=(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)(z-a_4)$ と因数分解できるので，被積分関数 $\dfrac{1}{z^4+1}$ の各特異点は 1 位の極である．

(3) $g(z) = z^4 + 1$ とおくと，$\dfrac{1}{z^4+1}$ の特異点 a_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ の留数は

$$\lim_{z\to a_k} \frac{z - a_k}{g(z)} = \lim_{z\to a_k} \frac{1}{\dfrac{g(z) - g(a_k)}{z - a_k}} = \frac{1}{g'(a_k)} = \frac{1}{4a_k^3}$$

で与えられる．よって，a_1, a_2, a_3, a_4 の留数は，それぞれ

$$\frac{1}{4a_1^3} = \frac{1}{4}e^{-i\frac{3\pi}{4}} = \frac{-1-i}{4\sqrt{2}}, \quad \frac{1}{4a_2^3} = \frac{1}{4}e^{-i\frac{9\pi}{4}} = \frac{1}{4}e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{1-i}{4\sqrt{2}},$$

$$\frac{1}{4a_3^3} = \frac{1}{4}e^{i\frac{9\pi}{4}} = \frac{1}{4}e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1+i}{4\sqrt{2}}, \quad \frac{1}{4a_4^3} = \frac{1}{4}e^{i\frac{3\pi}{4}} = \frac{-1+i}{4\sqrt{2}}$$

である．

(4) $R > 1$ に対して Γ_R を $z = Re^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ で与えられる半円弧とすると

$$\left|\int_{\Gamma_R} \frac{1}{z^4+1}\,dz\right| = \left|\int_0^\pi \frac{iRe^{i\theta}}{R^4e^{4i\theta}+1}\,d\theta\right|$$
$$\leq \int_0^\pi \frac{R}{|R^4e^{4i\theta}+1|}\,d\theta \leq \int_0^\pi \frac{R}{R^4-1}\,d\theta = \frac{\pi R}{R^4-1}.$$

ここで，最後の不等式において，$|R^4e^{4i\theta}+1|$ は原点を中心とする半径 R^4 の円周上の点 $R^4e^{4i\theta}$ と点 -1 との距離であり，その最小値は $R^4 - 1$ であることに注意する．よって，$\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{1}{z^4+1}\,dz = 0$ であることが証明された．

また，積分路 C_R は半円弧 Γ_R と線分 $[-R, R]$ からなるので

$$\oint_{C_R} \frac{1}{z^4+1}\,dz = \int_{\Gamma_R} \frac{1}{z^4+1}\,dz + \int_{-R}^{R} \frac{1}{x^4+1}\,dx$$

であり，ここで $R \to \infty$ とすれば (6.9) が成り立つ．

(5) $R > 1$ のとき，積分路 C_R で囲まれる半円板に含まれる被積分関数の特異点は a_1, a_2 の 2 点である．よって，**留数定理**より，すべての $R > 1$ に対して

$$\oint_{C_R} \frac{1}{z^4+1}\,dz = 2\pi i\left(\frac{1}{4a_1^3} + \frac{1}{4a_2^3}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

である．これと (6.9) より，(6.7) の積分値は $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$ である．　　**解答終わり**

ここで，これまでに用いた，いくつかの用語と事実を確認しておこう．点 a を複素関数 $f(z)$ の**孤立特異点**とする．すなわち，ある正定数 ρ があって，$f(z)$ は $0 < |z-a| < \rho$ で正則であるとする．このとき，$f(z)$ は $z = a$ のまわりで

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n \quad (0 < |z-a| < \rho)$$

と**ローラン展開**できる．ここで

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz \quad (0 < r < \rho)$$

であり，$\dfrac{1}{z-a}$ の係数 c_{-1} を $f(z)$ の a における**留数**という．また，自然数全体 $\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$ の部分集合 $S := \{n \in \mathbb{N} : c_{-n} \neq 0\}$ が空でない有限集合であるとき，a は $f(z)$ の**極**であるといい，集合 S の最大数を極 a の**位数**という．

a が $f(z)$ の 1 位の極であるとき，$g(z)=(z-a)f(z)$ とおくと，$g(z)$ は $z=a$ のまわりで正則で，$f(z)$ の a における留数は $g(a)$ で与えられる．問題 6.3 の小問 (3) の解答例において，この事実を用いた．

問題 6.3 の類題をもう 1 つ考えよう．

問題 6.4 （北海道大学大学院工学院機械宇宙工学専攻，人間機械システムデザイン専攻，エネルギー環境システム専攻，量子理工学専攻，平成 24 年度） 複素積分を利用して以下の実積分を求めよ．

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{1+x^2}\,dx \quad (a>0).$$

解答例 複素関数 $f(z)=\dfrac{e^{iaz}}{1+z^2}=\dfrac{e^{iaz}}{(z+i)(z-i)}$ を考える．また，$R>1$ とし，C_R を問題 6.3 の図 6.4 の積分路とする．このとき，$g(z)=\dfrac{e^{iaz}}{z+i}$ とおくと，$g(z)$ は $\mathbb{C}\setminus\{-i\}$ で正則だから，**コーシーの積分公式**より

$$\int_{C_R} f(z)\,dz=\int_{C_R}\frac{g(z)}{z-i}\,dz=2\pi i\,g(i)=\pi e^{-a}$$

が成り立つ．また，$\varGamma_R$ を $z=Re^{i\theta}$ $(0\le\theta\le\pi)$ で与えられる半円弧とすると，問題 6.3 (4) と同様に

$$\left|\int_{\varGamma_R} f(z)\,dz\right|=\left|\int_0^\pi \frac{e^{iaR\cos\theta-aR\sin\theta}}{1+R^2e^{2i\theta}}\,iRe^{i\theta}\,d\theta\right|$$
$$\le\int_0^\pi\frac{Re^{-aR\sin\theta}}{|1+R^2e^{2i\theta}|}\,d\theta\le\int_0^\pi\frac{R}{R^2-1}\,d\theta=\frac{\pi R}{R^2-1}$$

と評価でき，

$$2\int_0^\infty\frac{\cos ax}{1+x^2}\,dx=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^R\frac{e^{iax}}{1+x^2}\,dx=\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}f(z)\,dz=\pi e^{-a}$$

となる．よって，求める積分値は $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\cos ax}{1+x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}e^{-a}$ である． **解答終わり**

問題 6.4 の解答例では，留数定理の代わりに，コーシーの積分公式を用いたが，両者は本質的に同じものであり，どちらを使うかは好みの問題である．

6.3 位数 2 の極における留数

最後に，2 位の極が現れる問題を考えよう．

問題 6.5（東北大学大学院情報科学研究科情報基礎科学専攻，システム情報科学専攻，平成 23 年度） i を虚数単位とし，複素平面上の有理型関数 f を $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}$ により定める．以下の問いに答えよ．

(1) $r>0$ に対して，$|f(re^{i\theta})|$ の $0\le\theta\le\pi$ における最大値を $M(r)$ とするとき，$\displaystyle\lim_{r\to+\infty} r^2M(r)=0$ であることを示せ．

(2) 上半平面 $\mathrm{Im}\,z>0$ における $f(z)$ の極およびその点での留数をすべて求めよ．

(3)　定積分 $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\,dx$ の値を求めよ．

解答例　(1) $r > 1$, $0 \le \theta \le \pi$ のとき，$\sin\theta \ge 0$, $|r^2 e^{2i\theta} + 1| \ge r^2 - 1$ だから

$$|f(re^{i\theta})| = \frac{|e^{ir\cos\theta - r\sin\theta}|}{|r^2e^{2i\theta}+1|^2} = \frac{e^{-r\sin\theta}}{|r^2e^{2i\theta}+1|^2} \le \frac{1}{(r^2-1)^2}.$$

よって，$M(r) \le \dfrac{1}{(r^2-1)^2}$ であり，$\displaystyle\lim_{r\to+\infty} r^2 M(r) = 0$ が成り立つ．

(2) $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{(z+i)^2(z-i)^2}$ だから，$f(z)$ は $\mathbb{C}\setminus\{i,-i\}$ で正則である．よって，上半平面 $\mathrm{Im}\,z > 0$ における $f(z)$ の極は i のみである．

また，i は $f(z)$ の 2 位の極であり，$g(z) = (z-i)^2 f(z) = \dfrac{e^{iz}}{(z+i)^2}$ とおくと，$f(z)$ の極 i での留数は $g'(i)$ で与えられる．これを計算すると，$g'(i) = -\dfrac{i}{2e}$ となる．

(3) $R > 1$ とし，C_R を問題 6.3 の図 6.4 の積分路とする．また，$g(z)$ を (2) で定義した関数とする．このとき，留数定理（またはコーシーの積分公式）より

$$\int_{C_R} f(z)\,dz = \int_{C_R} \frac{g(z)}{(z+i)^2}\,dz = 2\pi i\, g'(i) = \frac{\pi}{e}$$

である．また，$\mathit{\Gamma}_R$ を $z = Re^{i\theta}$ $(0 \le \theta \le \pi)$ で与えられる半円弧とすると，(1) より

$$\left|\int_{\mathit{\Gamma}_R} f(z)\,dz\right| = \left|\int_0^\pi f(Re^{i\theta})\, iRe^{i\theta}\,d\theta\right| \le \int_0^\pi R|f(Re^{i\theta})|\,d\theta$$
$$\le \int_0^\pi RM(R)\,d\theta = \pi R M(R) \to 0 \quad (R \to \infty)$$

となる．よって

$$2\int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{(x^2+1)^2}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\,dz = \frac{\pi}{e}$$

であり，求める定積分の値は $I = \dfrac{\pi}{2e}$ である．　**解答終わり**

$m \ge 2$ に対して，a が $f(z)$ の m 位の極であるとき，$g(z) = (z-a)^m f(z)$ とおくと，$g(z)$ は a のまわりで正則で，$f(z)$ の a における留数は $\dfrac{1}{(m-1)!}g^{(m-1)}(a)$ で与えられる．問題 6.5 の解答例において，小問 (2) でこの事実を用いたが，その他の部分は，問題 6.4 の解答例とほぼ同様である．

今回の原稿を書くにあたり，一松信先生から頂いた貴重なご助言を参考にしたことを記しておく．次回のテーマは「線形代数 4」である．

参考文献

1)　一松信『解析学序説（新版）下巻』裳華房，1982 年．
2)　杉浦光夫『解析入門 II』東京大学出版会，1985 年．

（えびはら・まどか，埼玉大学大学院理工学研究科）
（おおた・まさひと，東京理科大学理学部）

特　集（2013 年 7 月号予告）

群と物理学

代数構造を用いて物理を知るために

本体 952 円

物理における群の重要性	川村　嘉春
群と量子力学	棚橋　誠治
群と弦理論	溝口　俊弥
群と相対性理論	小玉　英雄
量子群とパンルヴェ方程式	長谷川浩司
群と結晶	播磨　尚朝
群と場の量子論	寺尾　治彦
有限群で空間を潰そう	宮本　雅彦
有限群と素粒子物理学	小林　達夫
《名著に親しむ》	川村　嘉春

編集後記

小誌は本号にて通巻 600 号を迎えることができました．ひとえに読者の皆様のお陰でございます．深く感謝申し上げます．

次は通巻 700 号に向けて科学のさらなる発展とともに歩んでいきたいと思います．

今後とも何卒よろしくお願い申し上げます．(R)

*　　*

統計力学はほぼ完成しつつある分野だと思っていましたが，本特集を通して現在でも発展的研究が続けられている様子をみることができました．基礎的な分野も含め物理の世界には興味深い話題がまだまだたくさんありそうです．今後もどんどん特集していきたいと思います．(T)

数　理　科　学　6月号
2013 年 6 月 1 日発行

数 理 科 学 編 集 部　　発行人 木　下　敏　孝
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

ホームページ http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は sk@saiensu.co.jp まで．

発行所 © 株式会社 **サ イ エ ン ス 社**　TEL. (03) 5474–8500 (代表)
〒 151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25 振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600 (広告部)

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁